

СЕКЦИЯ 2
“ЭЛЕКТРОДИНАМИКА”

МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В.В. Сидоренков	2
О ФИЗИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ ВЕКТОРНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ В.В. Сидоренков	5
СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИССИПАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН В ПЛОСКОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С ЭКРАНАМИ В.В. Колыбасова	8
ВЛИЯНИЕ ТОНКОГО ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НА РЕЗОНАНСЫ СФЕРИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ Г.В. Белокопытов, А.В. Журавлев	11
ЭФФЕКТИВНЫЕ ПОВОРОТЫ НА МОДЕ TE_{01} КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА А.А. Вихарев, Г.Г. Денисов, С.В. Кузиков, Д.И. Соболев	14
АНАЛИЗ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ МИКРОВОЛН Ян Чунь, В.Л. Саввин	16
КОЛЕБАНИЯ ГРАНИЦЫ ИНТЕНСИВНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ ВЕЛИЧИНАХ ПАРАМЕТРА МАГНИТНОГО ПОЛЯ А.В. Архипов, Е.П. Глотов, А.Н. Дармаев, С.П. Морев, Д.С. Фокин	19
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКРЫТЫХ ВОЛНОВОДНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ МОД Г.Г. Денисов, М.Л. Кулыгин	22
МИНИМИЗАЦИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ПОТЕРЬ В РАЗРЫВАХ СВЕРХРАЗМЕРНЫХ ВОЛНОВОДОВ Г.Г. Денисов, Д.А. Луковников, В.И. Малыгин, Д.И. Соболев, А.В. Чирков	23
МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В СВЯЗАННЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СТРУКТУРАХ М.А. Малюгина, Ю.П. Шараевский	25

МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В.В. Сидоренков

Общепринято считать, что все явления электромагнетизма физически полно представлены векторными электромагнитными полями, свойства которых исчерпывающе описываются системой электродинамических уравнений, сформулированных в окончательной форме Максвеллом. При этом непосредственно следующие из уравнений Максвелла векторные потенциалы указанных полей как физическая реальность не рассматриваются, и им отводится роль вспомогательных математических функций, в ряде случаев существенно упрощающих вычисления. Однако к настоящему времени исследованиями в области электродинамики, квантовой механики, сверхпроводимости и др. достоверно установлено, что в фундаментальных уравнениях должны фигурировать не поля, а именно их потенциалы. Налицо серьезная проблема, для решения которой необходимо должным образом проанализировать известные либо сформулировать новые физические представления о роли и месте электромагнитных векторных потенциалов в классической электродинамике.

Сначала рассмотрим саму систему электродинамических уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$(a) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (b) \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (c) \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (d) \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1)$$

включающую в себя материальные соотношения:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2)$$

которые описывают отклик среды на наличие в ней электромагнитных полей. Принципиальная особенность этих динамических релятивистски инвариантных уравнений (1) состоит в том, что в их структуре заложена основная аксиома классической электродинамики - неразрывное единство переменных во времени электрического и магнитного полей. При этом характеризующий энергетический данный факта вектор Пойнтинга плотности потока электромагнитной энергии $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$, связанный с вектором плотности электромагнитного импульса $\vec{g} = [\vec{D}, \vec{B}] = \vec{S}/c^2$, отличен от нуля только там, где одновременно присутствуют электрическое и магнитное поля, векторы \vec{E} и \vec{H} которых неколлинеарны.

Таким образом, в рамках уравнений (1) в принципе невозможно представить раздельное существование чисто электрических либо чисто магнитных волн, переносящих только электрическую или только магнитную энергию. Кроме того, далеко не ясен вопрос о физической реализации момента импульса электромагнитного поля, соответственно, переносящих его волн, и каким образом это явление соотносится с уравнениями Максвелла. Чтобы аргументированно прояснить сложившуюся ситуацию, рассмотрим далее вопрос о возможности модификации уравнений электродинамики Максвелла в виде альтернативных им уравнений для электромагнитных векторных потенциалов.

Понятие векторного потенциала следует из очевидного положения о том, что дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю. Поэтому

магнитный векторный потенциал \vec{A}^m определится посредством соотношения $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ системы электромагнитных уравнений Максвелла (1), а электрический \vec{A}^e - соотношением $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ этой системы при $\rho = 0$, описывающим поляризацию локально электронейтральной среды:

$$(a) \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}^m, \quad (b) \quad \vec{D} = \operatorname{rot} \vec{A}^e. \quad (3)$$

Однозначность функций векторного потенциала, то есть чисто вихревой характер такого поля, обеспечивается условием кулоновской калибровки: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Тогда подстановка соотношения для магнитного векторного потенциала (3a) в уравнение вихря электрической напряженности системы (1) приводит к известной формуле связи поля вектора указанной напряженности с магнитным вектор-потенциалом:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t}, \quad (4)$$

описывающей закон электромагнитной индукции Фарадея. Отметим, что здесь не рассматривается электрический скалярный потенциал, формально следующий из этих рассуждений: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi^e$.

При аналогичной подстановке соотношения для электрического векторного потенциала (3b) в уравнение вихря магнитной напряженности системы (1) с учетом материальных соотношений получаем в итоге формулу связи поля этой напряженности с электрическим вектор-потенциалом:

$$\vec{H} = \frac{\vec{A}^e}{\tau_{\text{рел}}} + \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t}, \quad (5)$$

где $\tau_{\text{рел}} = \varepsilon \varepsilon_0 / \sigma$ - постоянная времени релаксации электрического заряда в среде за счет электропроводности.

Теперь можно убедиться, что результаты проведенных рассуждений действительно позволяют предложить альтернативу традиционной системе электромагнитных уравнений Максвелла (1). Используя формулы (3a) и (3b) связи полей индукции и их векторных потенциалов, имеем при подстановке в них соотношений (4) и (5) систему динамических уравнений относительно полей только электрического и магнитного векторных потенциалов:

$$(a) \quad \operatorname{rot} \vec{A}^e = -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t}, \quad (b) \quad \operatorname{div} (\mu \mu_0 \vec{A}^e) = 0, \quad (6)$$

$$(c) \quad \operatorname{rot} \vec{A}^m = \mu \mu_0 \left(\frac{\vec{A}^e}{\tau_{\text{рел}}} + \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} \right), \quad (d) \quad \operatorname{div} (\varepsilon \varepsilon_0 \vec{A}^m) = 0.$$

Нетривиальность уравнений системы (6) очевидна, поскольку в каждом одном роторном уравнении поля векторного потенциала \vec{A}^e или \vec{A}^m содержится информация о свойствах обоих роторных уравнений электромагнитных полей \vec{E} и \vec{H} системы (1). Так, например, если взять *ротор* от электрического роторного уравнения (6a), то после подстановки в его левую часть соотношения (3b), а в правую (3a) получается также “электрическое” роторное уравнение (1a). Теперь, если взять производную по времени ($\partial/\partial t$) от уравнения (6a) и использовать

подстановки соотношений (4) и (5), то оно преобразуется в “магнитное” роторное уравнение (1с). Аналогичные действия с магнитным роторным уравнением (6с) дают в итоге роторные уравнения (1с) и (1а). Дивергентные уравнения системы (6) посредством дифференцирования их по времени преобразуются в соответствующие уравнения системы (1) при $\rho = 0$.

Об исключительности уравнений векторных потенциалов говорит и тот факт, что дифференцирование по времени только магнитных уравнений системы (6) преобразует ее с учетом вышеизложенного в новую систему уравнений относительно полей электрической напряженности и ее вектор-потенциала:

$$(a) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}^e}{\tau_{\text{рел}}} + \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} \right), \quad (b) \quad \operatorname{div} (\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}) = 0, \quad (7)$$

$$(c) \quad \operatorname{rot} \vec{A}^e = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \quad (d) \quad \operatorname{div} (\mu\mu_0 \vec{A}^e) = 0.$$

Соответственно, дифференцирование по времени пары уравнений электрического векторного потенциала в системе (6) преобразует ее в другую новую систему уравнений теперь уже относительно полей магнитной напряженности и ее вектор-потенциала:

$$(a) \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}^m}{\tau_{\text{рел}}} + \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t} \right), \quad (b) \quad \operatorname{div} (\mu\mu_0 \vec{H}) = 0, \quad (8)$$

$$(c) \quad \operatorname{rot} \vec{A}^m = \mu\mu_0 \vec{H}, \quad (d) \quad \operatorname{div} (\varepsilon\varepsilon_0 \vec{A}^m) = 0.$$

Сделаем общее для всех систем замечание о дивергентных уравнениях. Как уже говорилось, уравнение $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ является калибровкой, обеспечивающей однозначность функции векторного потенциала \vec{A} , поэтому, согласно симметрии уравнений в рассматриваемых системах, другие дивергентные уравнения: (1b) при $\rho = 0$, (1d), (7b) и (8b) математически также следует считать соответствующими калибровками для функций вихревых полей \vec{E} и \vec{H} .

Судя по симметрии, представленные здесь системы уравнений физически не менее значимы, чем традиционная система (1), поскольку в их структуре также заложено принципиальное неразрывное единство полей электрического \vec{A}^e и магнитного \vec{A}^m векторных потенциалов в системе (6), полей электрической напряженности \vec{E} и ее вектор-потенциала \vec{A}^e в системе (7), и, наконец, полей магнитной напряженности \vec{H} и ее вектор-потенциала \vec{A}^m в системе (8). Можно показать, что каждая из систем автономна и самодостаточна при описании определенного класса физических явлений, строгое обоснование достоверности которых возможно в рамках именно этой конкретной системы электродинамических уравнений Максвелла, понимаемых теперь в значительно более широком смысле. Как видим, полученные результаты несомненно перспективны в плане непосредственного развития физических представлений о фундаментальной роли векторных потенциалов в явлениях электромагнетизма.

О ФИЗИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ ВЕКТОРНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В.В. Сидоренков

Проведем анализ систем электродинамических уравнений, полученных в результате модификации системы уравнений Максвелла электромагнитных полей [1], специфика которых состоит в том, что уравнения в этих системах описывают такие области пространства, где присутствуют только поля электрической напряженности и ее векторного потенциала:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}^e}{\tau_{\text{рел}}} + \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} \right), & \text{(b)} \quad \operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}) &= 0, \\ \text{(c)} \quad \operatorname{rot} \vec{A}^e &= \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, & \text{(d)} \quad \operatorname{div}(\mu\mu_0 \vec{A}^e) &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

либо только поля магнитной напряженности и ее векторного потенциала:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \operatorname{rot} \vec{H} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}^m}{\tau_{\text{рел}}} + \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t} \right), & \text{(b)} \quad \operatorname{div}(\mu\mu_0 \vec{H}) &= 0, \\ \text{(c)} \quad \operatorname{rot} \vec{A}^m &= \mu\mu_0 \vec{H}, & \text{(d)} \quad \operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \vec{A}^m) &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

и, наконец, только поля электрического и магнитного векторных потенциалов:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \operatorname{rot} \vec{A}^e &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t}, & \text{(b)} \quad \operatorname{div}(\mu\mu_0 \vec{A}^e) &= 0, \\ \text{(c)} \quad \operatorname{rot} \vec{A}^m &= \mu\mu_0 \left(\frac{\vec{A}^e}{\tau_{\text{рел}}} + \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} \right), & \text{(d)} \quad \operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \vec{A}^m) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно структуре представленных уравнений, описываемые ими поля распространяются в пространстве в виде волн, скорость которых в отсутствие поглощения определяется электрическими и магнитными параметрами этого пространства: $c = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$. В этом можно убедиться, взяв, как обычно, ротор от одного из роторных уравнений системы, и после чего подставить в него другое роторное уравнение той же системы. В качестве иллюстрации получим, например, для системы (3) волновое уравнение относительно \vec{A}^e :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}^m \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}^e - \Delta \vec{A}^e = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A}^m = -\sigma\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^e}{\partial t^2},$$

где, согласно (3b), $\operatorname{div} \vec{A}^e = 0$, а Δ - оператор Лапласа.

Таким образом, имеем теперь волновые уравнения не только для электромагнитных полей \vec{E} и \vec{H} , но и для их векторных потенциалов \vec{A}^e и \vec{A}^m в парных комбинациях этих четырех уравнений в зависимости от системы. В итоге возникает физически очевидный, принципиальный вопрос: какие это волны, и что они переносят? Другими словами, необходимо прояснить физическое содержание рассматриваемых здесь систем электродинамических уравнений Максвелла, понимаемых теперь в значительно более широком смысле.

В случае системы (1) введем аналогично вектору Пойнтинга плотности потока электромагнитной энергии $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ другой потоковый вектор $\vec{S}^e = [\vec{E}, \vec{A}^e]$, который, судя по размерности, определяет электрическую энергию, приходящуюся на единицу площади поверхности. Для физически аргументированного обоснования возможности существования такого вектора воспользуемся стандартными рассуждениями, как при выводе соотношения баланса энергии электромагнитного поля (теорема Пойнтинга) из уравнений Максвелла. В итоге из уравнений системы (1) получим:

$$\vec{A}^e \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{A}^e = \operatorname{div} \vec{S}^e = -\varepsilon \varepsilon_0 (\vec{E}, \vec{E}) - \mu \mu_0 \vec{A}^e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}^e}{\tau_{\text{рел}}} + \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} \right) \quad (4)$$

- уравнение энергетического баланса процесса электрической поляризации среды в данной точке. Как видим, уравнения электрических полей напряженности \vec{E} и векторного потенциала \vec{A}^e системы (1) описывают статические и динамические чисто электрические явления, показывают реальность волн, переносящих только электрическую энергию.

Аналогично, для системы (2) можно ввести потоковый вектор $\vec{S}^m = [\vec{H}, \vec{A}^m]$, размерность которого определяет поверхностную плотность магнитной энергии. Подтверждение этому найдем из уравнений (2) в виде уравнения энергетического баланса процесса намагничивания среды в данной точке:

$$\operatorname{div} \vec{S}^m = -\mu \mu_0 (\vec{H}, \vec{H}) - \varepsilon \varepsilon_0 \vec{A}^m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}^m}{\tau_{\text{рел}}} + \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t} \right). \quad (5)$$

Следовательно, уравнения магнитных полей напряженности \vec{H} и векторного потенциала \vec{A}^m системы (2) описывают статические и динамические магнитные явления, устанавливают реальность волн, переносящих только магнитную энергию.

Очевидно, что такие результаты анализа систем (1) и (2) в принципе невозможны и просто абсурдны в рамках системы уравнений Максвелла для \vec{E} и \vec{H} полей, но это нисколько не является ее недостатком, а лишь иллюстрирует автономию одной системы уравнений по отношению к другим.

Полученные уравнения энергетического баланса (4) и (5) описывают не только энергетику обычной электрической и магнитной поляризации среды с помощью соответствующей напряженности поля (первое слагаемое), но и показывают возможность реализации эффектов динамической поляризации вещества посредством изменяющегося во времени поля векторного потенциала, причем наличие электропроводности среды способствует этому. Надо сказать, что явления динамической поляризации вещества, по всей вероятности, уже имеют реальное экспериментальное воплощение: это эффекты *электродинамической индукции* в металлах [2] и *динамического намагничивания* в ферритах и магнитоупорядоченных металлах [3].

Подобным образом для системы (3) вводится вектор $\vec{S}^A = [\vec{A}^e, \vec{A}^m]$, определяющий момент импульса на единицу площади поверхности. Соответственно, уравнения (3) позволяют получить уравнение баланса процесса

передачи момента импульса поля электромагнитных потенциалов в данной точке среды:

$$\operatorname{div} \vec{S}^A = -\frac{\mu\mu_0}{\tau_{\text{рел}}}(\vec{A}^e, \vec{A}^e) - \mu\mu_0 \vec{A}^e \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} - \varepsilon\varepsilon_0 \vec{A}^m \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t}. \quad (6)$$

Согласно этому уравнению, проводящей среде момент импульса передается только электрическим вектор-потенциалом, стационарным в том числе, а диэлектрической – переменными во времени полями электрического или магнитного потенциалов. Целесообразно отметить, что вектор момента импульса поля электромагнитных векторных потенциалов $\vec{S}^A = [\vec{A}^e, \vec{A}^m]$ никак не может быть сопоставлен с предложенным в порядке гипотезы из механических аналогий вектором момента импульса электромагнитного поля $\vec{K} = [\vec{r}, \vec{S}]/c^2$, дискуссия о котором продолжается по сей день и носит, на наш взгляд, тупиковый характер. Итак, уравнения системы (3) описывают необычные волны векторного потенциала, переносящие момент электромагнитного импульса, которые, однако, в явном виде не переносят энергии, поскольку в них \vec{E} и \vec{H} равны нулю. Вопрос о физическом смысле таких волн остается открытым.

В качестве конкретной иллюстрации фундаментальной роли векторных потенциалов в электродинамике отметим сообщение [4], где на основе физических представлений об электрическом \vec{A}^e и магнитном \vec{A}^m векторных потенциалах металлического проводника с током сделано, по существу, формальное утверждение о том, что в проводник при электропроводности вместе с потоком вектора электромагнитной энергии Пойнтинга поступают потоки чисто электрической и чисто магнитной энергии, момента импульса, возникающие в таких условиях в электромагнитном поле. Теперь такое утверждение можно, по нашему мнению, считать теоретически вполне обоснованным.

Проведенные здесь исследования, как нам представляется, достоверно показали, что поля электромагнитных векторных потенциалов никоим образом нельзя считать математическими фикциями, поскольку, как установлено выше, посредством их реализуются фундаментальные характеристики объективной реальности: энергия, импульс и его момент. Таким образом, наряду с традиционными электромагнитными полями в классической электродинамике: \vec{E} , \vec{H} , $\vec{E}\vec{E}$ и \vec{B} , их векторные потенциалы \vec{A}^e и \vec{A}^m также являются полноправными физически значимыми полями, расширяющими представления об электромагнитных полевых процессах.

1. В.В. Сидоренков // Труды школы-семинара “Волны-2005”. Секция 2.
2. Д.А. Дюдкин, А.А. Комаров. Электродинамическая индукция. Новая концепция геомагнетизма. Препринт НАНУ, ДонФТИ-01-01, 2001.
3. В.В. Сидоренков, В.В. Толмачев, С.В. Федотова // Изв. РАН. Сер. Физич. 2001. Т. 65. № 12. С. 1776.
4. В.В. Сидоренков // Труды школы-семинара “Волны-2004”. Секция 6. С. 9.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИССИПАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ
УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН В ПЛОСКОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ
С ЭКРАНАМИ

В.В. Колыбасова

Задачи Дирихле и Неймана для диссипативного уравнения установившихся волн в областях с экранами изучались в [1, 2].

На плоскости $x \in R^2$ рассмотрим многосвязную область, ограниченную простыми разомкнутыми кривыми (экранами) $\Gamma_1^1, \dots, \Gamma_{N_1}^1 \in C^{2,\lambda}$ и простыми замкнутыми кривыми $\Gamma_1^2, \dots, \Gamma_{N_2}^2 \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$, так, что кривые не имеют общих точек, в частности, концов. Будем рассматривать как случай внешней области, так и случай внутренней области, когда кривая Γ_1^2 охватывает все

остальные. Положим $\Gamma^1 = \bigcup_{n=1}^{N_1} \Gamma_n^1$, $\Gamma^2 = \bigcup_{n=1}^{N_2} \Gamma_n^2$, $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$. Связную область,

ограниченную Γ^2 и содержащую Γ^1 , будем называть D , так что $\partial D = \Gamma^2$, $\Gamma^1 \subset D$. Предположим, что каждая кривая Γ_n^j параметризована длиной дуги s :

$\Gamma_n^j = \{x: x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), s \in [a_n^j, b_n^j]\}$, $n = 1, \dots, N_j$, $j = 1, 2$, так, что $a_1^1 < b_1^1 < \dots < a_{N_1}^1 < b_{N_1}^1 < a_1^2 < b_1^2 < \dots < a_{N_2}^2 < b_{N_2}^2$ и область D остаётся справа при

возрастании параметра s на Γ_n^2 . Совокупности отрезков оси Ox $\bigcup_{n=1}^{N_1} [a_n^1, b_n^1]$,

$\bigcup_{n=1}^{N_2} [a_n^2, b_n^2]$ и $\bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{n=1}^{N_j} [a_n^j, b_n^j]$ далее также будем обозначать Γ^1 , Γ^2 и Γ

соответственно.

Положим $C^{j,r}(\Gamma_n^2) = \{f(s): f(s) \in C^{j,r}[a_n^2, b_n^2], f^{(m)}(a_n^2) = f^{(m)}(b_n^2), m = 0, j\}$, $j = 0, 1$, $r \in [0, 1]$,

и $C^{j,r}(\Gamma^2) = \bigcap_{n=1}^{N_2} C^{j,r}(\Gamma_n^2)$. Пусть $\vec{n}_x = (x_2'(s), -x_1'(s))$ — вектор нормали к Γ в точке

$x(s)$. Будем рассматривать Γ^1 как совокупность разрезов. Сторону Γ^1 , остающуюся слева при возрастании параметра s , будем обозначать $(\Gamma^1)^+$, а противоположную сторону — $(\Gamma^1)^-$.

Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу гладкости \mathbf{K} , если

- 1) $u \in C^0(\overline{D \setminus \Gamma^1}) \cap C^2(D \setminus \Gamma^1)$ и $u(x)$ непрерывна на концах разрезов Γ^1 ,
- 2) $\nabla u \in C^0(\overline{D \setminus \Gamma^1 \setminus X})$, где X — множество точек, состоящее из концов Γ^1 :

$$X = \bigcup_{n=1}^{N_1} [x(a_n^1) \cup x(b_n^1)],$$

- 3) в окрестности любой точки $x(d) \in X$ для некоторых констант $c > 0$, $\varepsilon > -1$ выполняется неравенство

$$|\nabla u| \leq c |x - x(d)|^\varepsilon, \quad (1)$$

где $x \rightarrow x(d)$ и $d = a_n^1$ или $d = b_n^1$, $n = 1, \dots, N_1$.

В определении класса \mathbf{K} $u(x)$ и $\nabla u(x)$ непрерывно продолжимы на разрезы $\Gamma^1 \setminus X$ слева и справа, но могут иметь скачок при переходе через $\Gamma^1 \setminus X$.

Задача **U**. Найти функцию $u(x)$ из класса \mathbf{K} , которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца $u_{x_1 x_1}(x) + u_{x_2 x_2}(x) + k^2 u(x) = 0$, $x \in D \setminus \Gamma^1$, $k = \text{const}$, $\text{Im} k > 0$, и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}_x} \right|_{x(s) \in \Gamma^1} = G(s), \quad u(x)|_{x(s) \in \Gamma^2} = F(s). \quad (2)$$

Если D — внешняя область, добавим условия на бесконечности $u = o(|x|^{-1/2})$, $|\nabla u(x)| = o(|x|^{-1/2})$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$.

Все условия задачи **U** должны выполняться в классическом смысле.

Ниже будем считать, что

$$G(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma^1), \quad F(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma^2), \quad \lambda \in (0,1]. \quad (3)$$

Под $\int_{\Gamma^j} \dots d\sigma$ будем понимать $\sum_{n=1}^{N_j} \int_{a_n^j}^{b_n^j} \dots d\sigma$.

Будем искать решение задачи **U** в виде

$$u[\mu](x) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma^2} \mu(\sigma) \frac{\partial H_0^{(1)}(k|x-y(\sigma)|)}{\partial \vec{n}_y} d\sigma + \frac{i}{4} \int_{\Gamma^1} \mu(\sigma) V(x, \sigma) d\sigma, \quad (4)$$

где $V(x, \sigma) = \int_{a_n^1}^{\sigma} \frac{\partial H_0^{(1)}(k|x-y(\xi)|)}{\partial \vec{n}_y} d\xi$, $\sigma \in [a_n^1, b_n^1]$, $n = 1, \dots, N_1$, $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Будем искать $\mu(s)$ в пространстве $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^{1,\lambda/4}(\Gamma^2)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$, с нормой $\|\cdot\|_{C_q^\omega(\Gamma^1)} + \|\cdot\|_{C^{1,\lambda/4}(\Gamma^2)}$. Будем говорить, что $\mu(s) \in C_q^\omega(\Gamma^1)$, если

$$\mu_1(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma^1), \quad \text{где } \mu_1(s) = \mu(s) \prod_{n=1}^{N_1} |s - a_n^1|^q |s - b_n^1|^q, \quad \text{и } \|\mu(\cdot)\|_{C_q^\omega(\Gamma^1)} = \|\mu_1(\cdot)\|_{C^{0,\omega}(\Gamma^1)}.$$

Кроме того, функция $\mu(s)$ должна удовлетворять условиям

$$\int_{a_n^1}^{b_n^1} \mu(\sigma) d\sigma = 0, \quad n = 1, \dots, N_1. \quad (5)$$

Используя результаты [3], можно проверить, что если $\mu(s)$ принадлежит пространству $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^{1,\lambda/4}(\Gamma^2)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$, и удовлетворяет условиям (5), то функция (4) удовлетворяет всем условиям задачи, кроме граничных условий (2). Чтобы удовлетворить граничным условиям, подставим (4) в (2) и получим интегральные уравнения для $\mu(s)$ на Γ^1 и Γ^2

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^1} \mu(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - s} + \int_{\Gamma} \mu(\sigma) Y_1(s, \sigma) d\sigma = -2G(s), \quad s \in \Gamma^1, \quad (6a)$$

$$\mu(s) + \int_{\Gamma} \mu(\sigma) Y_2(s, \sigma) d\sigma = 2F(s), \quad s \in \Gamma^2,$$

(6b)

где $Y_1(s, \sigma) = [1 - \delta(\sigma)] \left\{ \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s} \right] - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} V_0(x(s), \sigma) \right\} -$

$-\frac{i}{2} \delta(\sigma) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} H_0^{(1)}(k|x(s) - y(\sigma)|) \in C^{0, p_0}(\Gamma^1 \times \Gamma), \quad p_0 = \lambda, \quad \text{если } 0 < \lambda < 1, \quad \text{и}$

$p_0 = 1 - \varepsilon_0 \quad \text{для любого } \varepsilon_0 \in (0, 1), \quad \text{если } \lambda = 1 \quad [4, \text{ лемма } 3],$

$Y_2(s, \sigma) = \frac{i}{2} [1 - \delta(\sigma)] V(x(s), \sigma) + \frac{i}{2} \delta(\sigma) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} H_0^{(1)}(k|x(s) - y(\sigma)|),$

$V_0(x, \sigma) = \int_{a_n^1}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} h(k|x - y(\xi)|) d\xi, \quad \sigma \in [a_n^1, b_n^1], \quad n = 1, \dots, N_1, \quad h(z) = H_0^{(1)}(z) - \frac{2i}{\pi} \ln \frac{z}{k},$

$\delta(s) = 0, \quad \text{если } s \in \Gamma^1, \quad \text{и } \delta(s) = 1, \quad \text{если } s \in \Gamma^2. \quad \text{Через } \varphi_0(x, y) \quad \text{обозначен угол между вектором } \overrightarrow{xu} \quad \text{и направлением нормали } \vec{n}_x. \quad \text{Угол } \varphi_0(x, y) \quad \text{считается положительным, если он отложен от } \vec{n}_x \quad \text{против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае. Кроме того, } \varphi_0(x, y) \quad \text{непрерывен при } x, y \in \Gamma, \quad \text{если } x \neq y. \quad \text{Согласно [3, 4], } Y_2(s, \sigma) \in C^0(\Gamma^2 \times \Gamma), \quad \text{т. к. } \Gamma \in C^{2, \lambda}.$

Лемма. Если $\Gamma \in C^{2, \lambda}, \quad \lambda \in (0, 1],$ и выполнены условия (3), то система уравнений (6), (5) имеет решение $\mu(s) \in C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2), \quad p = \min\{1/2, \lambda\}.$ Это решение системы (6), (5) единственно в пространстве $C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2).$

Теорема. Если $\Gamma \in C^{2, \lambda}, \quad \lambda \in (0, 1],$ и выполнены условия (3), то решение задачи **U** существует, единственно и даётся формулой (4), где $\mu(s)$ — решение системы (6), (5) в $C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2), \quad p = \min\{1/2, \lambda\},$ гарантированное леммой.

Решение задачи **U** удовлетворяет условию (1) с $\varepsilon = -1/2.$

1. Р.А. Крутицкий // Hiroshima Math. J. 1998. V. 28. № 1. P. 149.
2. Р.А. Крутицкий // Int. J. Maths. Math. Sci. 1998. V. 21. № 2. P. 209.
3. П.А. Крутицкий // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. № 8–9. С. 1237.
4. П.А. Крутицкий // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. № 11. С. 1652.

ВЛИЯНИЕ ТОНКОГО ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НА РЕЗОНАНСЫ СФЕРИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Г.В. Белокопытов, А.В. Журавлев

Существенное влияние на рассеяние электромагнитного излучения микро и наночастицами оказывает отклонение поляризуемости их поверхностного слоя от значений, характеризующих объемные образцы. При этом на поверхности возникает ток поляризации, который отличается от тока поляризации в объеме. Когда слой имеет толщину в несколько десятков атомных слоев, само представление о тонком поверхностном слое, как области вещества, для которой однозначно определены локальные значения толщины и диэлектрической проницаемости, является избыточным с точки зрения макроскопической электродинамики. Более адекватный подход – учет свойств поверхностного слоя интегральными величинами – компонентами тензора, характеризующими поверхностный ток поляризации, и не требующими точного знания диэлектрической проницаемости и ширины слоя.

Нами рассмотрена модель, аналогичная задаче Ми, для сферической частицы с поверхностным слоем. Особенность модели заключается в том, что для сшивания полей снаружи и внутри шара были использованы модифицированные граничные условия [1]. Условия предполагают скачок тангенциальных составляющих электрических и магнитных полей в результате действия поверхностного тока поляризации. При этом учет свойств поверхностного слоя производится заданием компонент тензора поверхностной поляризуемости κ . В рамках этой модели получены аналитические выражения для парциальных амплитуд вынужденных колебаний и рассеянного излучения. Эти соотношения применимы, когда поверхностный слой обладает анизотропией, и оптической активностью. Если поверхностный слой однородный и изотропный, результат его влияния может быть рассмотрен в рамках модели двухслойного резонатора [3]. В этом случае рассмотренная нами модель дает аналогичные результаты.

В кварцевых шариках с малым затуханием добротности возбуждаемых резонансов на оптических частотах могут быть очень высокими $\sim 10^{10}$. Небольшие отклонения свойств поверхностной поляризуемости от объемных значений будут заметно влиять на эти резонансы. Установлено, что на добротности резонаторов с малым затуханием значительное влияние оказывают только $\text{Im}(\kappa_n)$, $\text{Im}(\kappa_\tau)$, а на собственные частоты – $\text{Re}(\kappa_n)$, $\text{Re}(\kappa_\tau)$. В случае тонких диэлектрических поверхностных слоев, изменение собственных частот $\Delta\nu(\kappa_n, \kappa_\tau)$ и обратных добротностей $\Delta\alpha(\kappa_n, \kappa_\tau) = Q^{-1}(0,0) - Q^{-1}(\kappa_n, \kappa_\tau)$, являются линейными. На рисунке 1 представлены результаты расчета $\Delta\alpha(\kappa_n, \kappa_\tau)$ для ТМ моды, возбуждаемой в шарике диаметром 300 мкм. Показатель преломления кварца на длине волны $\lambda = 633$ нм был принят равным $1.457 + 10^{-8}i$. Расчет производился для моды, которая наиболее эффективно

возбуждается при воздействии плоской неоднородной волны от призмического элемента связи. Ее порядок $l = 1$ и номер $n = 2145$.

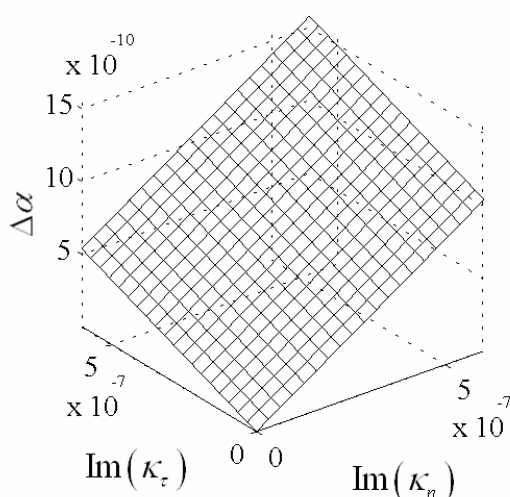


Рис. 1.

Влияние коэффициентов κ_τ и κ_n на параметры ТМ-мод оказывается одного порядка. В тоже время, поскольку ТЕ мод отсутствует радиальная компонента электрического поля, их параметры ν и α не зависят от коэффициентов κ_n .

В работе [2] наблюдался нестационарный во времени сдвиг частот и изменение добротностей в результате адсорбции воды на поверхности кварцевого шарика. Эффективная толщина d слоя по оценкам в рамках модели двухслойного резонатора менялась с течением времени в интервале от 1 до 3 ангстрем. Информация о ν и α была приведена только для ТЕ мод, таким образом оказалось возможным оценить величины реальной и мнимой частей κ_τ , результаты расчета приведены на рисунке 2.

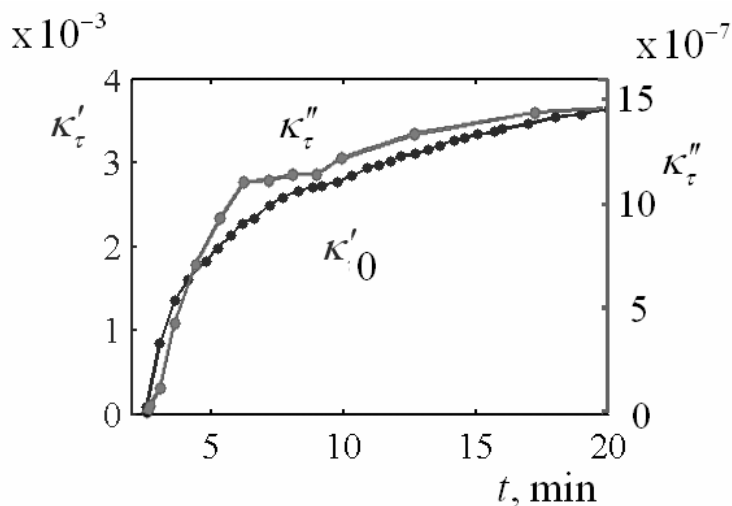


Рис. 2.

В СВЧ экспериментах также оказывается возможным осуществлять диагностику тонких поверхностных слоев. На рисунке 3 представлены расчеты добротности Q диэлектрического резонатора в зависимости от толщины d слоя золота, напыленного на шарик из титаната стронция, легированного

берилием (SrBi) TiO₃. Диэлектрическая проницаемость вещества шара на СВЧ частотах ($f \approx 10^{10}$ Гц) была принята равной $10^3 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-4}i)$, диаметр шарика – 2 мм. Диэлектрическая проницаемость золота полагалась равной $1 + 7.8 \cdot 10^7i$, а слой – изотропным. Рассмотрены моды $TE_{1,2}$ и $TM_{1,2}$, имеющие резонансные частоты в отсутствие слоя $f_0^{TE} = 9.48$ и $f_0^{TM} = 11.65$ ГГц соответственно. Добротности мод в отсутствие слоя составляли $Q_{TE} = 1000$, $Q_{TM} = 1000$. Интересно заметить, что добротности уменьшаются, когда толщина слоя лежит в интервале от 0.1 до 1.5 нм. В интервале $d \in [1.5, 4]$ нм наблюдается нерезонансный, пологий характер поведения парциальных амплитуд. С увеличением толщины слоя $d > 4$ добротности увеличиваются. Собственные частоты, после перехода через область нерезонансного поведения, претерпевают скачок, $f_0^{TE} \approx 11.6$ и $f_0^{TM} \approx 9.2$.

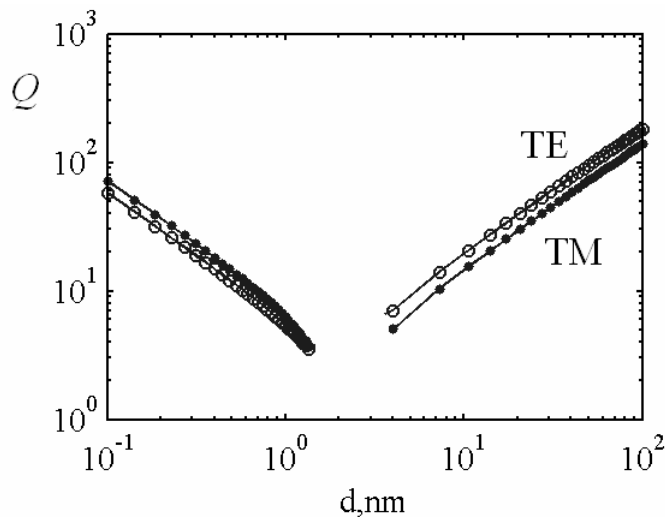


Рис. 3.

Полученные в работе соотношения позволяют производить количественные оценки эффектов поверхностного слоя на характеристики рассеяния. Итоговые соотношения модели поверхностной поляризуемости оказываются относительно простыми, сопоставимыми по сложности с формулами стандартной задачи Ми. Они допускают применение и для решения обратной задачи, то есть нахождения компонент тензора поверхностной поляризуемости по известным характеристикам рассеяния света на шаре с извлечением детальной информации о поверхностной поляризуемости.

1. А.А. Голубков, В.А. Макаров // Изв. РАН, сер. физ. 1995. Т. 59. № 12. С. 93.
2. M.L. Gorodetsky, A.A. Savchenkov, V.S. Ilchenko // Opt. Lett. 1996. V. 21. P. 453.
3. M. Kerker. The scattering of electromagnetic radiation and light. New York: Academic Press, 1969.

ЭФФЕКТИВНЫЕ ПОВОРОТЫ НА МОДЕ TE_{01} КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

А.А. Вихарев, Г.Г. Денисов, С.В. Кузиков, Д.И. Соболев

При построении волноводных линий передачи возникает необходимость в компонентах, обеспечивающих сохранение волноводной моды при повороте линии. При изгибе волновода круглого сечения коэффициенты связи отличны от нуля только для пар мод, азимутальные индексы которых отличаются на единицу. Так как мода TE_{01} вырождена с модой TM_{11} , то происходит сильная нежелательная трансформация моды TE_{01} в TM_{11} . В данной работе представлены два возможных варианта поворота волновода круглого сечения на 90° , основной идеей эффективной передачи моды TE_{01} в которых, является снятие вырождения между модами TE_{01} и TM_{11} .

Первым вариантом является решение с использованием волноводного поворота с постоянным радиусом кривизны и малой эллиптичностью сечения (Рис.1.а), нормальные моды которого, соответствующие модам TE_{01} и TM_{11} круглого волновода, не являются вырожденными. Собственные моды эллиптического волновода были рассчитаны методом интегральных уравнений [4], коэффициент передачи моды TE_{01} был рассчитан методом поперечных сечений [2], по результатам расчетов, эффективность волноводного поворота составила 99% по мощности.

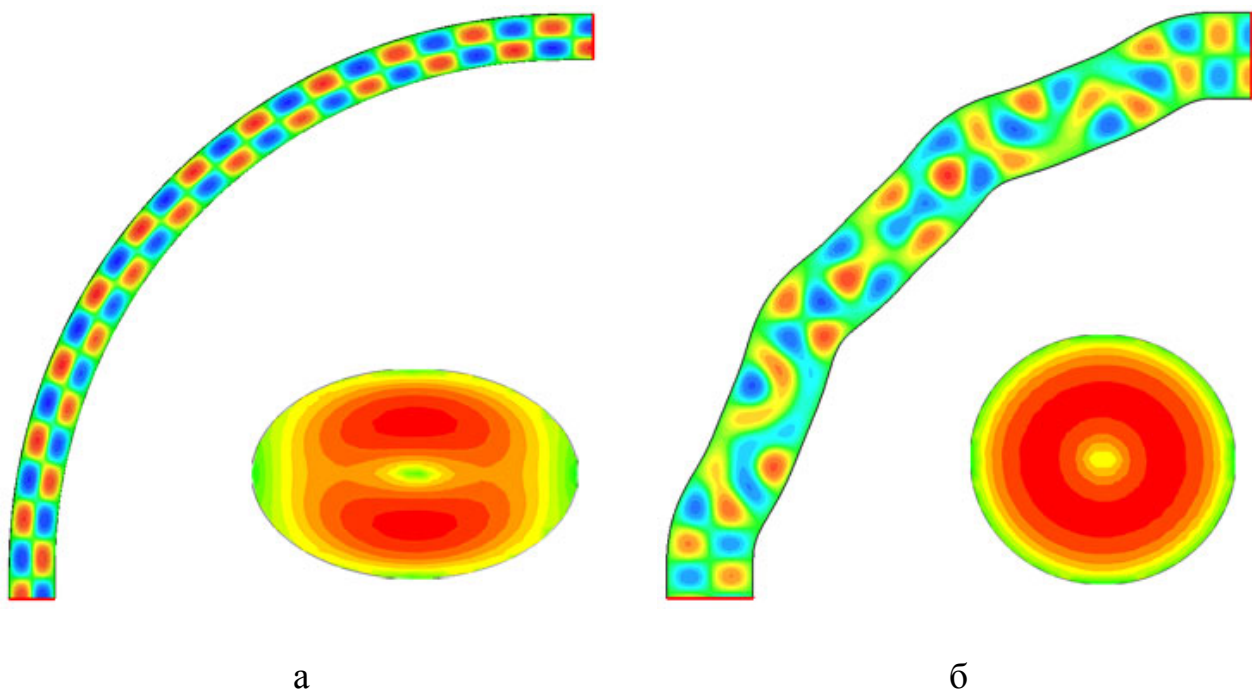


Рис. 1. Профили поворотов и распределение электрического поля в волноводе а) эллиптического сечения, б) круглого сечения

Вторым вариантом - является решение с использованием волноводного поворота с неизменным круглым сечением и переменным радиусом кривизны (Рис.1.б), в котором вырождение мод TE_{01} и TM_{11} снято за счет введения дополнительной связи моды TE_{01} с модами TE_{11} и TE_{12} [3]. Профиль такого

волновода находился в результате процедуры синтеза [3], в результате применения которой эффективность волноводного поворота составила 99.9% по мощности.

На основе проведенных расчетов волноводные повороты были изготовлены, и проверены экспериментально. На Рис.2 представлены результаты расчетов и эксперимента. Эффективность поворотов составила 96-98%.

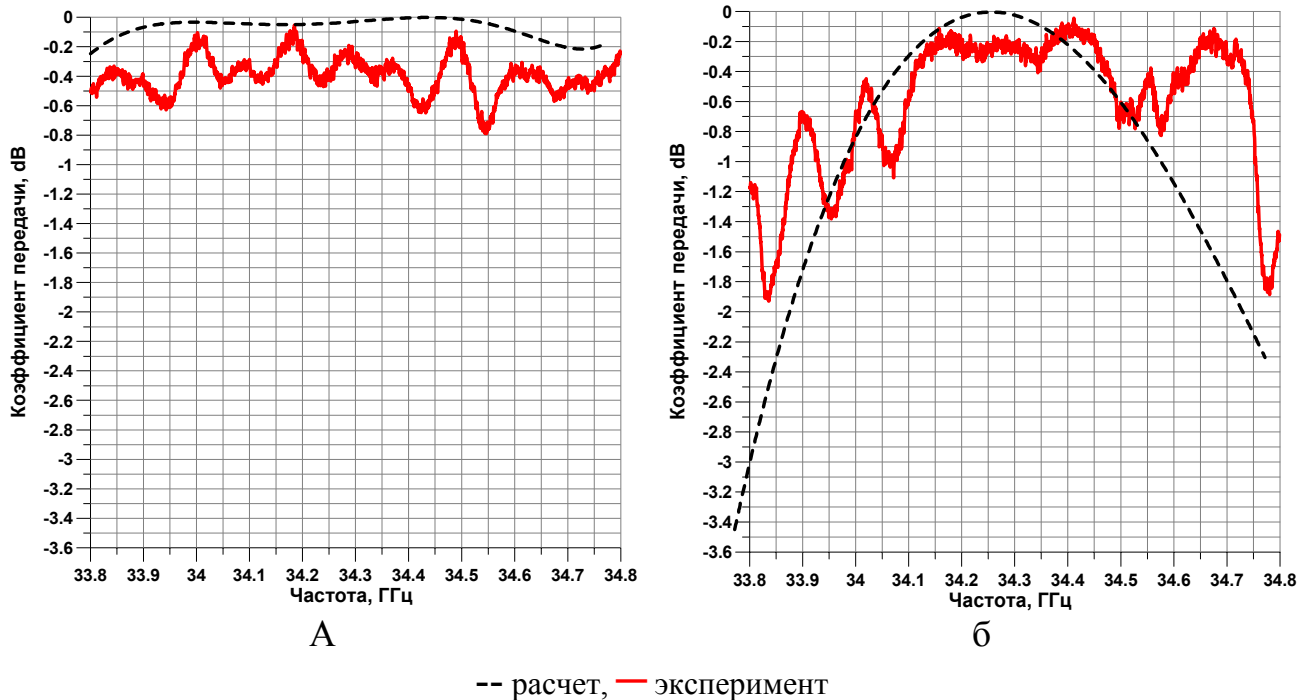


Рис. 2. Графики коэффициента передачи моды TE_{01} в волноводном повороте а) эллиптического сечения, б) круглого сечения.

1. *B. Plaum, D. Wagner, W. Kasparek, M. Thumm* // Proc. of 25th International Conference on Infrared and Millimeter Waves, 2000, Beijing, China. P. 219.
2. *Б.З. Каценеленбаум*. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
3. *Г.Г. Денисов, Г.И. Калынова, Д.И. Соболев* // Известия вузов. Радиофизика 2004. Т. XLVII. № 8. С. 688.
4. *G.G. Denisov, S.V. Kuzikov* // International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 1997. V. 18. № 3. P. 733.

АНАЛИЗ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ МИКРОВОЛН

Ян Чунь, В.Л. Саввин

В последние годы интенсивно развиваются направления радиофизики, связанные с созданием и применением мощных источников широкополосного микроволнового излучения и методами их анализа. Создана программа для расчета характеристик произвольных широкополосных аксиально-симметричных излучателей, применявшаяся к анализу опытного образца излучателя, разработанного в ИТЭС РАН [1].

В нашей работе для анализа характеристик микроволновых излучателей применена программа, основанная на методе конечных интегралов (МКИ), впервые предложенном в 1976 [2]. Этот численный метод обеспечивает универсальную пространственную схему дискретизации, применимую к различным электромагнитным задачам, от вычислений статических полей до высокочастотных полей в пространственно-временных представлениях. Ранее он был успешно применен для разработки пакет программ «MAFIA» и др.

В отличие от большинства численных методов компьютерной симуляции, использующих дифференциальную форму уравнений Максвелла, метод МКИ основан на дискретизации их интегральной формы в пространственно-временном представлении:

$$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{s} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}, \quad (1a)$$

$$\oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{s} = \int_A \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) d\vec{A}, \quad (1b)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} d\vec{A} = \int_V \rho dV, \quad (1c)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} d\vec{A} = 0, \quad (1d)$$

где $\vec{E}(r,t) = \vec{E}(r)e^{j\omega t}$, $\vec{H}(r,t) = \vec{H}(r)e^{j\omega t}$, $\vec{D}(r,t) = \vec{D}(r)e^{j\omega t}$, $\vec{B}(r,t) = \vec{B}(r)e^{j\omega t}$ - векторы напряженности и индукции электрического и магнитного поля, соответственно.

Для численного решения этих уравнений выбирается область конечных вычислений (домен), включающая область рассматриваемой прикладной задачи. Для создания удобной сетки для расчетов в рассматриваемой области, домен разбивается на множество кубоидов, так называемых ячеек сетки. Ортогонально к этой первичной сетке может быть создана вторичная сетка ячеек.

Пространственная дискретизация уравнений Максвелла в конечном виде осуществляется на этих двух ортогональных сеточных системах, причем распределение компонент электрической напряженности e и потока магнитной индукции b локализованы на на первичной сетке G , а распределение компонент

электрической индукции d и магнитной напряженности h на вторичной сетке \tilde{G} .

Таким образом, уравнения Максвелла в интегральной форме могут быть сформулированы для каждой сетки ячейки отдельно.

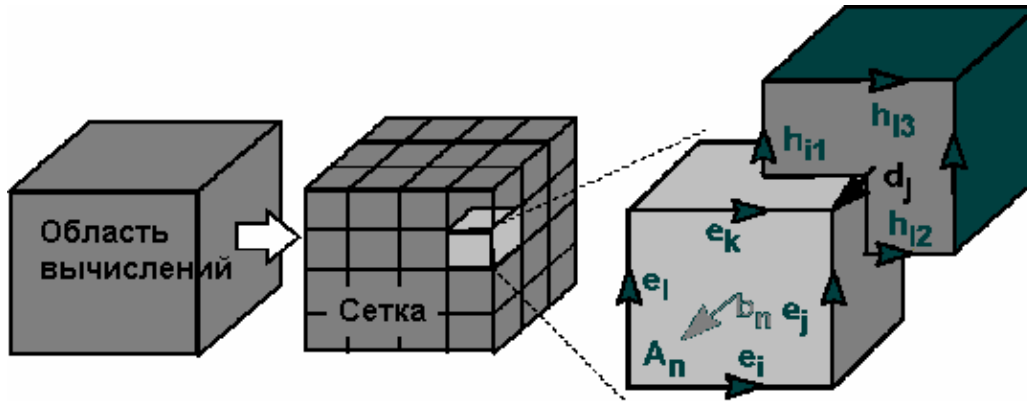


Рис. 1. Ортогональные первичная и вторичная сеточные системы.

С учетом закона Фарадея интеграл по контуру в левой части уравнения (1a) может быть записан с достаточной точностью как сумма четырех напряжений в узлах сетки (см. рис.1), а производная магнитной индукции по времени, рассчитанная на первичной сетке, представляет собой подынтегральное выражение в правой части уравнения:

$$e_i + e_j - e_k - e_l = -\frac{\partial}{\partial t} b_n \quad (2)$$

Повторяя эту процедуру для всех доступных ячеек первичной сетки, схема вычислений уравнения (1a) и (1b) может быть представлена в матричной формулировке:

$$C e = -\frac{d}{dt} b, \quad (3a)$$

$$\tilde{C} h = \frac{d}{dt} d + j. \quad (3b)$$

Для дискретизации уравнений (1c) и (1d) удобно ввести дискретные операторы дивергенции S и \tilde{S} , относящиеся к первичной и вторичной сетке, соответственно.:

$$\tilde{S} d = q, \quad (3c)$$

$$S b = 0. \quad (3d)$$

В конце концов, получается законченный набор дискретных уравнений - так называемых сеточных уравнений Максвелла

Наконец, соотношения между напряженностью электрических и магнитных полей и значениями их электрической и магнитной индукции дают возможность приравнять их интегральные значения на гранях сетки и области ячеек соответственно. Следовательно, результирующие коэффициенты зависят от усредненных материальных параметров и от пространственного разрешения сетки и могут быть объединены в соответствующие матрицы:

$$d = M_{\varepsilon} e, \quad (4a)$$

$$b = M_{\mu} h, \quad (4b)$$

$$j = M_{\sigma} e + j_s. \quad (4c)$$

Таким образом, получены все матричные уравнения для решения электромагнитных полевых задач на дискретном сеточном пространстве.

Метод конечных интегралов является общим методом и может быть применен к анализу излучающих устройств в широком диапазоне частот. В качестве опытного образца использован излучатель ИТЭС РАН.

Изменение диаграмма направленности излучателя рассчитывались в пределах 0,3 – 10 ГГц. Расчетная диаграмма направленности для частоты 3 ГГц представлена на рис.2.

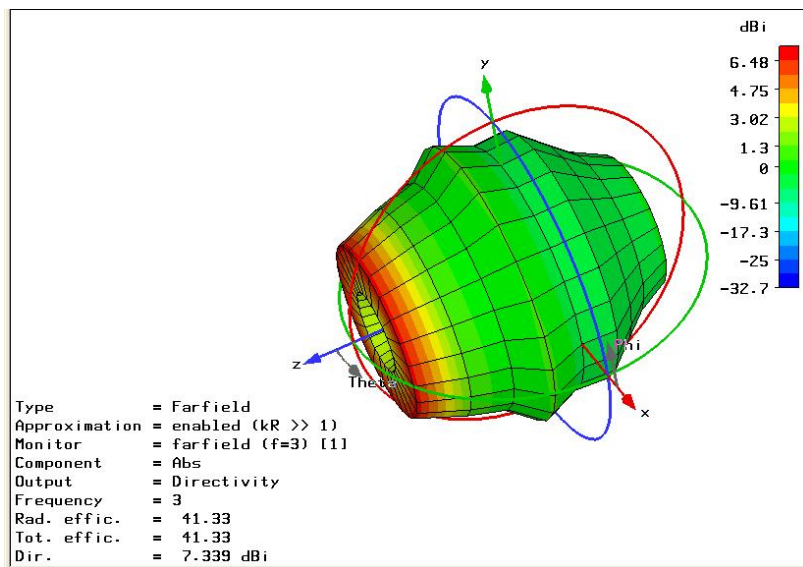


Рис. 2. Расчетная диаграмма направленности для частоты 3 ГГц.

Изучено изменение направленности излучения с частотой. Отмечено, что в длинноволновой части диапазона диаграмма направленности излучателя расширяется, что связано с его конструктивными особенностями.

1. С. Махров. Дипломная работа. Физфак МГУ, 2003.
2. T. Weiland // Electronics and Communication. 1977. V. 31. P. 116.

КОЛЕБАНИЯ ГРАНИЦЫ ИНТЕНСИВНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ ВЕЛИЧИНАХ ПАРАМЕТРА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А.В. Архипов, Е.П. Глотов, А.Н. Дармаев, С.П. Морев, Д.С. Фокин

Системы фокусировки со знакопеременным магнитным полем, широко применяющиеся в современных ЭВП СВЧ О–типа, при всех достоинствах (по сравнению с системами фокусировки однородным полем) обладают весьма неприятным свойством. При некоторых значениях параметров магнитного поля α , фокусировка потока магнитной периодической фокусирующей системой (МПФС) становится неустойчивой, и амплитуда его пульсаций может неограниченно возрастать по мере продвижения пучка вдоль оси [1].

Применение МПФС с амплитудой третьей гармоники магнитного поля сопоставимой по величине с первой гармоникой [2], позволяет увеличить значения параметра α , а использование МПФС, в которых (кроме третьей гармоники) относительно велика амплитуда пятой гармоники [3], может уменьшать динамическую расфокусировку.

В докладе приведены результаты численных решений нелинейного уравнения, описывающего колебательные процессы границы пучка в МПФС с высшими гармоническими составляющими (ВГС) при высоких значениях параметра α ($\alpha > 0,4$). Показано, что в МПФС с синусоидальным распределением осевой компоненты индукции магнитного поля при $0,4 < \alpha < 0,55$ появляется зона нелинейного резонанса с высокой, но конечной амплитудой пульсаций границы пучка (рис. 1а), в отличие от решений линеаризованного уравнения, при которых для рассматриваемых параметров α появляется зона параметрического резонанса с неограниченным возрастанием амплитуды пульсаций границы потока.

Представлены результаты расчетов ячеек МПФС с учетом нелинейности магнитных свойств материала наконечников, реализующих распределения осевой компоненты индукции магнитного поля с различным содержанием ВГС и сопоставление их с данными экспериментального исследования (рис. 2).

Показано, что использование МПФС с малой третьей гармоникой и отрицательной пятой гармоникой, составляющей примерно 10% от амплитуды первой гармоники, не приводит к смещению первой зоны нелинейного резонанса в сторону больших α (рис. 3а-в). Зона этого нелинейного резонанса для МПФС со значимыми величинами ВГС может быть существенно смещена в сторону высоких значений параметра α (рис. 1б).

Представленные результаты расчетов колебаний границы электронного потока в МПФС с ВГС значительного уровня (рис. 3г-е) демонстрируют целесообразность применения их для транспортировки протяженных интенсивных электронных потоков в современных СВЧ приборах.

1. И.В. Алямовский. Электронные пучки и электронные пушки. М.: Сов. Радио, 1966.
2. Л.Э. Бахрах, В.В. Мурзин, В.К. Беляев // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1978. В. 10. С. 39.
3. А.Ю. Кивокурцев, С.П. Морев, Г.Ю. Юдин // Материалы международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП – 98”. 1998. Т. 3. С. 84.

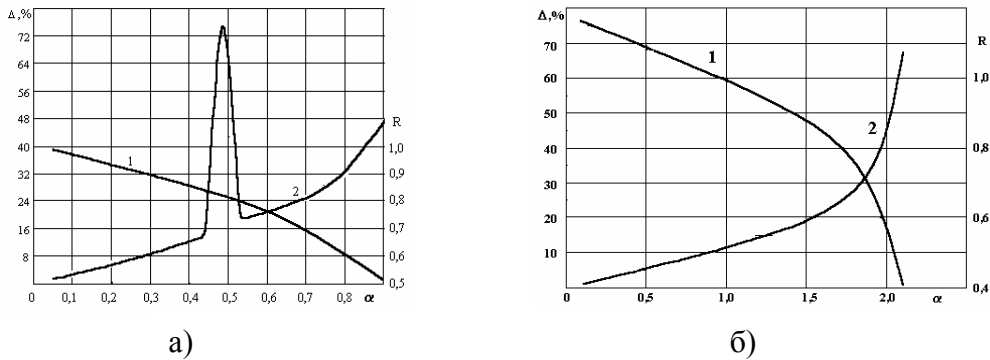


Рис.1. Зависимость оптимального входного радиуса пучка R (1) и относительной амплитуды пульсаций Δ (2) в МПФС от параметра магнитного поля α

а) – МПФС с одной гармоникой $V_1 = V_A$;

б) – МПФС с ВГС ($A_1=0.732V_A$, $A_3=0.33V_A$, $A_5=-0.275V_A$, $A_7=-0.03V_A$, $A_9=0.03V_A$)

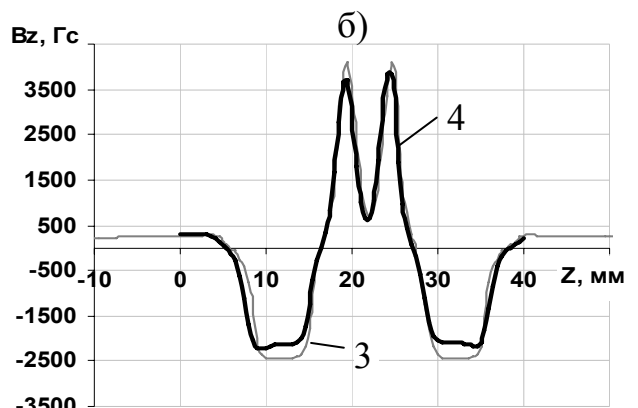
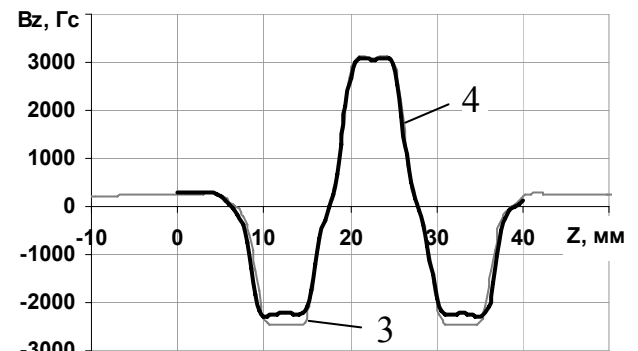
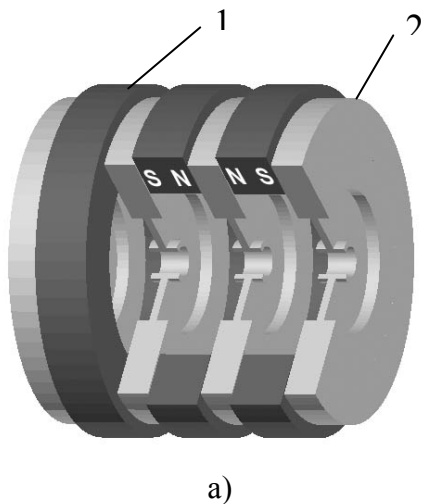


Рис. 2. Ячейка МПФС (1-2), расчетное (3) и экспериментальное (4) распределения осевой компоненты индукции магнитного поля с ВГС

а) 1 – кольцевой магнит, 2- наконечник;

б) – МПФС с малыми значениями ВГС;

в) – МПФС со значительными значениями ВГС.

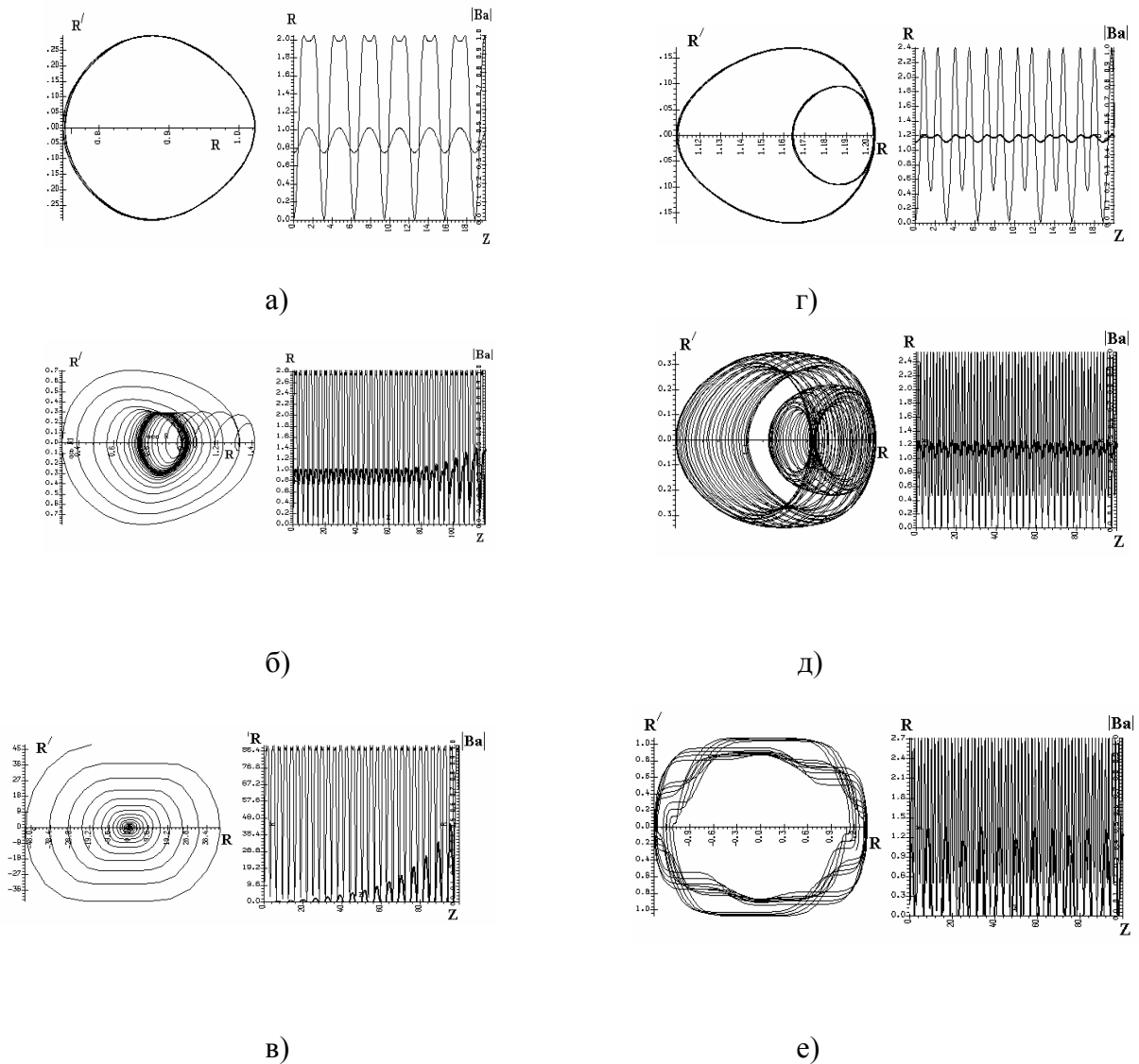


Рис. 3. Фазовые портреты и колебания границы пучка в полигармоническом магнитном поле при оптимальных входных условиях влета

(а)-(в) - МПФС с незначительными значениями ВГС

($A_1 = 1.08V_A$, $A_3 = 0.033V_A$, $A_5 = -0.121V_A$, $A_7 = -0.044V_A$);

(г)-(е) - МПФС с высокими значениями ВГС

($A_1=0.732V_A$, $A_3=0.33V_A$, $A_5=-0.275V_A$, $A_7=-0.03V_A$, $A_9=0.03V_A$);

а) $Z_{\text{кон}}=20$, $\alpha=\beta_p=0.43$, б) $Z_{\text{кон}}=100$, $\alpha=\beta_p=0.43$, в) $Z_{\text{кон}}=100$, $\alpha=0.58$, $\beta_p=0$,

г) $Z_{\text{кон}}=20$, $\alpha=\beta_p=0.43$, д) $Z_{\text{кон}}=100$, $\alpha=\beta_p=0.75$, е) $Z_{\text{кон}}=100$, $\alpha=0.75$, $\beta_p=0$.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКРЫТЫХ ВОЛНОВОДНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ МОД

Г.Г. Денисов, М.Л. Кулыгин

Открытые волноводные преобразователи мод используются для модификации поперечной структуры проходящего излучения, с целью получения структур, удобных для ввода в нагрузку и удаления отраженного сигнала. В работе рассматривается задача о прохождении квазимонохроматического излучения через преобразователь с последующим излучением в свободное пространство. Применяется метод нестационарного численного моделирования FDTD [1, 2] с граничными условиями в виде неразделенного идеально-согласованного слоя UPML [3]. Результаты представляются в виде амплитуды продольной компоненты магнитного поля на продолжении развертки исходного круглого волновода и сравниваются с результатами расчетов методом интегрального уравнения IE (рис. 1). Коэффициенты корреляции решений, полученных двумя методами, для первых 6-ти симметричных TE-мод круглого волновода превышают 90 %.

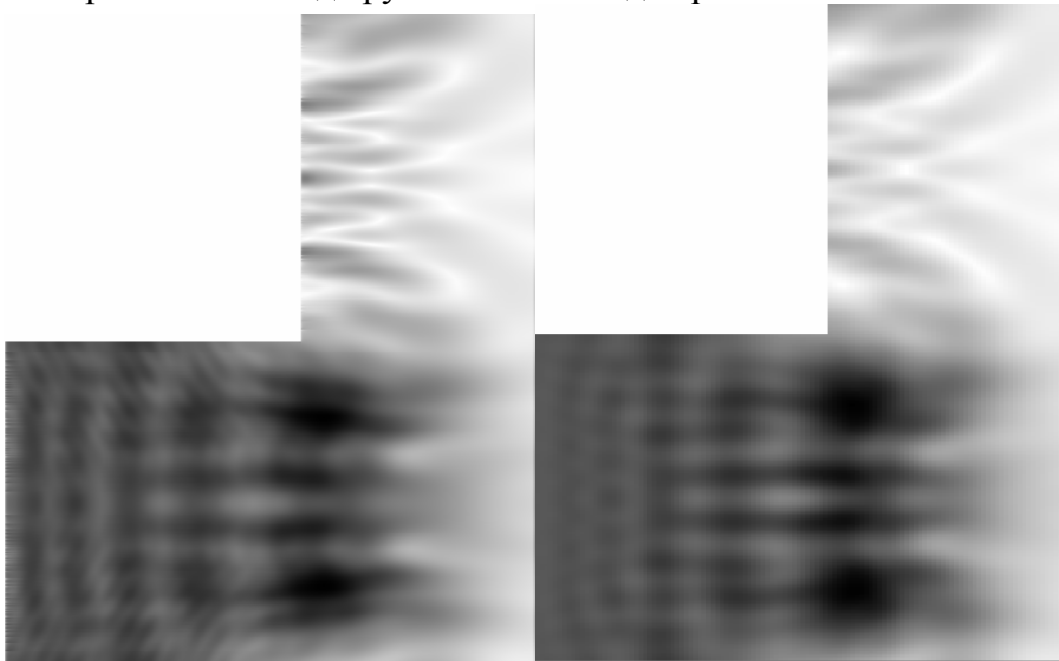


Рис. 1. Решения для моды TE_{06} круглого волновода: метод FDTD (слева) в сравнении с методом IE (справа).

1. *K.S. Yee* // IEEE Transactions on antennas and propagation. 1966. V. AP-14. № 8. P. 302.
2. *A. Taflove and S.C. Hagness*. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Second Edition. Boston and London: Artech House, 2000.
3. *S.D. Gedney* // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. December 1996. V. 44. № 12. P. 1630.

МИНИМИЗАЦИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ПОТЕРЬ В РАЗРЫВАХ СВЕРХРАЗМЕРНЫХ ВОЛНОВОДОВ

Г.Г. Денисов, Д.А. Луковников, В.И. Малыгин, Д.И. Соболев, А.В. Чирков

Использование многомодовых (или сверхразмерных) волноводов в линиях передачи СВЧ высокой частоты или высокой мощности обусловлено необходимостью достижения достаточно малых омических потерь, а также малых значений электрического поля. Такие линии передачи широко используются в СВЧ-установках различного назначения (экспериментальные установки УТС, радары, технологические комплексы и т.д.). В частности, диаметр круглых волноводов для линий передачи СВЧ достигает нескольких десятков длин волн (на частотах порядка 100 ГГц).

Уменьшение дифракционных потерь в больших (сравнимых с диаметром волновода) разрывах является очень важной задачей, поскольку разрывы являются ключевыми элементами таких компонентов, как изгибы волноводов (уголки), модовые фильтры, откачные порты и т.д. [1].

До настоящего времени было предпринято множество попыток уменьшения дифракционных потерь в разрывах [2-3 и др.]. Использовались различные методы – от простого увеличения радиуса волновода до приготовления специальной смеси волноводных мод в выходном сечении. Для волноводных уголков были также разработаны специальные профили зеркал (синтезированные или конфокальные). В некоторых случаях значения потерь удавалось уменьшить в 10 раз по сравнению с потерями в неоптимизированном разрыве волновода, но задача по-прежнему оставалась значимой, так как потери определяют общую эффективность линии передачи, а также возможные проблемы с ее функционированием, вызванные отражениями и запираем высокими «паразитных» мод.

Стоит также отметить, что полученные значения потерь были по-прежнему далеки от теоретического минимума. Кроме того, до настоящего времени не было выработано систематического подхода к минимизации потерь и не было ясного понимания ограничений на их значения.

В работе предлагается систематический подход к проблеме, иллюстрируемый результатами расчетов и натуральных экспериментов. Использование данного подхода позволяет существенно уменьшить дифракционные потери в разрывах волноводов, а во многих случаях и вплотную приблизится к значению теоретического минимума потерь для данного сечения волновода, длины разрыва и частоты излучения. При этом подход позволяет с высокой точностью оценить потери еще до окончательного расчета геометрии волноводов.

В работе приведены некоторые примеры компонентов линий передачи, рассчитанных при помощи предложенного алгоритма:

1. Волноводный фильтр для моды HE_{11} гофрированного круглого волновода на частоте 84 ГГц. Диаметр волновода 31.75 мм, длина разрыва 70 мм, расчетные значения потерь – 0.4%.
2. «Волноводно-квазиоптическая» линия передачи на основе гофрированного круглого волновода, состоящая из участков волновода, играющих роль линз (длина одного участка 9 см) и разрывов между ними (длина разрыва 7 см). Частота 84 ГГц, диаметр выходного сечения волновода 31.75 мм, расчетные значения потерь на одном разрыве – 0.4%.
3. Переход на волновод большего радиуса при помощи разрыва. Диаметр передающего волновода 31.75 мм, приемного – 45 мм. Частота 100 ГГц, длина разрыва 80 мм, расчетные значения потерь – 0.5%.

В качестве экспериментальной проверки характеристик полученных компонентов в работе представлены результаты испытаний волноводного фильтра (пример 1). Согласно полученным данным, потери моды HE_{11} при прохождении фильтра равны $(1 \pm 0.5)\%$. Эффективное поглощение фильтром остальных мод за счет их рассеяния на разрыве также подтверждено испытаниями фильтра в составе гиротронного комплекса на установке LHD (Япония) при мощности импульса 170 кВт и длительности 3900 с.

1. *M. Thumm, W. Kasperek // IEEE Trans. on Plasma Science. 2002. PS-30. P. 755.*
2. *J.L. Doane and C.P. Moeller // Int. J. Electronics. 1994. V. 77. P. 489.*
3. *V.I. Belousov, A.A. Bogdashov, A.V. Chirkov, G.G. Denisov, S.V. Kuzikov // Proc. of the Inter. Workshop “Strong Microwaves in Plasmas”. Nizhny Novgorod, 2-9 august 1999. 2000. V. 2. P. 948.*

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ
МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В СВЯЗАННЫХ
ФЕРРОМАГНИТНЫХ СТРУКТУРАХ

М.А. Малюгина, Ю.П. Шараевский

Известно (см., например, [1,2]), что поверхностные магнитостатические волны (ПМСВ), распространяющиеся в одиночной касательно намагниченной ферромагнитной плёнке, при повышении уровня сигнала являются устойчивыми относительно продольных возмущений.

В тоже время в слоистых структурах, введение дополнительного слоя (полупроводника или металла [3]) может приводить при определённых условиях к модуляционной неустойчивости ПМСВ, причём этот эффект обусловлен, изменением характера дисперсии волн. Модуляционная неустойчивость ПМСВ в одиночной ферромагнитной плёнке может наблюдаться также при возбуждении двух сигналов на разных частотах, причём в данной ситуации модуляционная неустойчивость обусловлена взаимным влиянием двух устойчивых волн [4].

В настоящей работе анализируется возможность модуляционной неустойчивости ПМСВ в структуре, представляющей собой две ферромагнитные плёнки, разделённые слоем диэлектрика. Можно сказать, что в такой структуре распространяются связанные поверхностные магнитостатические волны, линейные характеристики которых достаточно хорошо изучены (см., например, [1]).

Особенности модуляционной неустойчивости применительно к случаю распространения связанных объёмных магнитостатических волн подробно рассмотрены в работах авторов [5]. Причём показано, что в таких системах, в отличие от указанных выше слоистых структур, связь может не только приводить к изменению дисперсионных характеристик волн, но и к появлению нелинейной связи между волнами.

Анализируемая структура представляет собой два ферромагнитных слоя толщиной $D_{1,2}$ с намагниченностью насыщения $M_{0,2}$, соответственно, разделённых диэлектрическим промежутком толщины d . Постоянное магнитное поле \bar{H}^0 приложено по касательной к поверхности слоёв. Подобная структура может рассматриваться как две связанные линии передачи, в каждой из которых распространяется поверхностная магнитостатическая волна. Взаимное влияние волн в каждой из плёнок осуществляется через ВЧ магнитные поля, что позволяет эффективные магнитные поля $\bar{H}_{1,2}$ в слоях 1 и 2 представить как:

$$\bar{H}_{1,2} = \bar{H}_{1,2}^0 + \bar{h}_{1,2} + K\bar{h}_{2,1}, \quad (1)$$

где $\bar{h}_{2,1}$ - переменные ВЧ магнитные поля, $\bar{H}_{1,2}^0$ - постоянные компоненты, K - коэффициент связи, зависящий от толщины d .

Предполагалось также, что нелинейность каждой плёнки, обусловленная изменением продольной компоненты магнитного момента $M_{z_{1,2}}$, определяется только величиной переменной намагниченности этой плёнки:

$$M_{z_{1,2}} \approx M_{0_{1,2}} (1 - |m_{1,2}|^2), \quad (2)$$

где $m_{1,2}$ – переменные намагниченности, значения которых определяются ВЧ магнитными полями как одной, так и другой плёнки [5].

Важной особенностью связанных структур является расщепление дисперсионной кривой, соответствующей волне в одиночной плёнке, на две, т.е. возбуждение на одной частоте двух нормальных волн – быстрой и медленной волн с различными волновыми числами $k_{\sigma,m}$.

С учётом дисперсионного соотношения для связанных ПМСВ [1], а также соотношений (1) и (2), на основе «метода огибающих» [2], можно получить систему нелинейных уравнений, описывающих эволюцию огибающей нормальных волн в структуре $\varphi_{\sigma,m}(y,t)$ в следующем виде:

$$j \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{\sigma,m} \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi_{\sigma,m} + \frac{A_{\sigma,m}}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{\sigma,m}}{\partial y^2} - \frac{1}{4} (B_{\sigma\sigma,m\sigma} |\varphi_{\sigma}|^2 + B_{\sigma m,mm} |\varphi_m|^2) \varphi_{\sigma,m} = 0, \quad (3)$$

где $V_{\sigma,m} = \frac{\partial \omega}{\partial k_{\sigma,m}}$, $A_{\sigma,m} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_{\sigma,m}^2}$, $B_{\sigma\sigma,m\sigma} = \frac{\partial \omega}{\partial |\varphi_{\sigma}|} \Big|_{k_{\sigma,m}}$, $B_{\sigma m,mm} = \frac{\partial \omega}{\partial |\varphi_m|} \Big|_{k_{\sigma,m}}$ – коэффициенты,

характеризующие групповые скорости, дисперсию, нелинейность, соответственно, и зависящие от параметров плёнок и величины связи.

Исследование на устойчивость системы (3), применительно к структуре, состоящей из плёнок с одинаковыми параметрами, показывает, что инкремент неустойчивости является комплексной величиной, т.е. возмущения возрастают, при выполнении следующего условия:

$$C^2 > h_{\sigma} h_m, \quad (4)$$

где $h_{\sigma,m} = \frac{1}{4} A_{\sigma,m} \chi_{\sigma,m}^2 (A_{\sigma,m} \chi_{\sigma,m}^2 + 4 B_{\sigma,m} \varphi_{0_{\sigma,m}}^2)$, $C = 2 \chi_{\sigma} \chi_m \sqrt{A_m A_{\sigma} B_{\sigma} B_m \varphi_{0_{\sigma}}^2 \varphi_{0_m}^2}$, а $\varphi_{0_{\sigma,m}}^2$ –

амплитуды нормальных волн в начальный момент времени. Из (4) видно, что если в структуре возбуждаются две нормальные волны (т.е. $\varphi_{0_{\sigma,m}} \neq 0$), вне зависимости от знаков величин $A_{\sigma,m}$, $B_{\sigma,m}$, существуют такие волновые числа возмущений $\chi_{\sigma,m}$, для которых выполняется данное условие (4). Таким образом, не зависимо от того, устойчиво ли решение каждого из уравнений в (4) в отдельности, решение системы уравнений будет неустойчиво, т.е. ПМСВ могут быть модуляционно неустойчивы в связанной структуре при возбуждении двух нормальных волн. Данный вид неустойчивости, возникающей при одновременном распространении двух модуляционно устойчивых волн, связанных через нелинейность называется кросс-модуляцией [4].

В случае возбуждения одной из нормальных волн в структуре, система (3) распадается на два несвязанных уравнения для каждой из волн и условие (4) в этом случае примет вид, известный как критерий Лайтхилла [2]. Анализ

коэффициентов в этих уравнениях показал, что действие связи не приводит к смене знаков коэффициентов нелинейности, однако, возможно изменение знаков коэффициентов дисперсии $A_{\sigma,m}$ для одной из нормальных мод в узкой области частот. В этих областях выполняется критерий Лайтхилла и волна становится неустойчивой.

На рис.1а приведены результаты расчёта областей модуляционной неустойчивости при возбуждении одной из нормальных волн для случая одинаковых плёнок. Сильная связь (малые значения d) приводит к модуляционной неустойчивости в области высоких частот, а слабая связь - в области низких. При уменьшении толщины плёнок диапазон частот, при котором возможна неустойчивость, сужается (см. вставку к рис.1а). Для структуры, состоящей из плёнок с различными параметрами при фиксированной частоте f , существует некоторый диапазон значений D_2/D_1 (M_{0_2}/M_{0_1}), соответствующих модуляционной неустойчивости либо быстрой, либо медленной волны (рис.1б). Для медленной волны этот диапазон больше, чем для быстрой и увеличивается по мере приближения параметров D_2/D_1 (M_{0_2}/M_{0_1}) к 1.

Таким образом, в работе показано, что ПМСВ, устойчивые по отношению к продольным возмущениям в одиночной плёнке, могут быть модуляционно неустойчивы в связанной касательно намагниченной ферромагнитной структуре. Неустойчивость может возникать как при возбуждении только одной моды за счёт изменения характера дисперсии, так и при возбуждении двух мод за счёт возникновения нелинейной связи.

Работа выполнена в рамках научной программы Федерального агентства по образованию "Развитие научного потенциала высшей школы" (грант № 372-05), Федерального агентства по образованию и CRDF (грант REC-006) и РФФИ (грант № 04-02-16296).

1. А.В. Вашковский, В.С. Стальмахов, Ю.П. Шараевский. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: СГУ, 1993.
2. А.К. Звездин, А.Ф. Попов // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. В. 2. С. 606.
3. А.С. Киндяк // ЖТФ. 1999. Т. 69. В. 6. С.119.
4. А.О. Короткевич, С.А. Никитов // ЖЭТФ. 1999. Т.116. В. 6(12). С. 205.
5. М.А. Малюгина, Ю.П. Шараевский // Изв. ВУЗов - Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. № 3. С. 59.

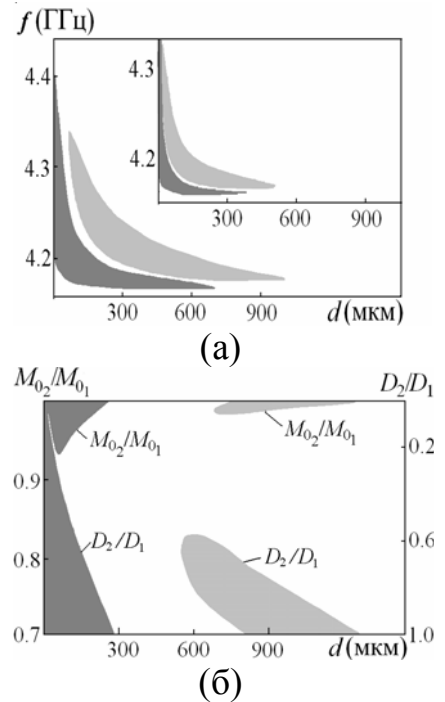


Рис. 1. Плоскость параметров (f,d) , демонстрирующая области неустойчивости при возбуждении быстрой (светлые области) и медленной (тёмные) волн в системе при $\bar{H}^0=2630$ Э, $f=4.35$ ГГц: (а) $D_{1,2}=20$ мкм (вставка $D_{1,2}=5$ мкм), $M_{0_{1,2}}=140$ Гс; (б) $D_1 \neq D_2$ ($D_1=20$ мкм, $M_{0_{1,2}}=140$ Гс); $M_{0_1} \neq M_{0_2}$ ($M_{0_1}=140$ Гс, $D_{1,2}=20$ мкм).