

## СЕКЦИЯ 7. АКУСТИКА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

**Движение кластера жестких микрочастиц в вязкоупругой среде под действием акустической радиационной силы**

В.Г. Андреев ..... 2

**Электрический пробой в жидкостях при воздействии наносекундных импульсов**

В.Г. Андреев, В.А. Вдовин ..... 6

**Нелинейные волны в микротрубочках аксонов нервных клеток**

А.Н. Бугай, S. Zdravković ..... 8

**Нелинейные волны в резонаторе из гелеобразной среды с неоднородностями в виде полостей**

Т.Б. Крит, В.Г. Андреев ..... 10

**Распространение упругих волн в двумерных акустических композитных структурах**

П.В. Мальнева ..... 14

## Движение кластера жестких микрочастиц в вязкоупругой среде под действием акустической радиационной силы

В.Г. Андреев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра акустики  
[andreev@acs366.phys.msu.ru](mailto:andreev@acs366.phys.msu.ru)

Микрокальцификаты (минеральные отложения в виде микрокристаллов) являются диагностическим признаком развития злокачественной опухоли в молочной железе [1,2]. В настоящее время маммография является «золотым стандартом» для обнаружения микрокальцификатов. Микрокальцификаты выглядят на маммограмме как белые точки с размерами порядка миллиметра, распределенные в области 1 - 2 см. При различных патологических изменениях тканей встречаются разные типы отложений. Размер частиц, как правило, не превышает 200 - 300 мкм. Такие кальцификаты образуют кластеры, бывают распределены линейно или сегментарно.

Стандартная аппаратура ультразвуковой диагностики, имеющая значительное преимущество перед лучевыми методами в плане безопасности, неэффективна в обнаружении микрокальцификатов. Это связано с малыми размерами твердых микрочастиц, в результате чего отраженные от них сигналы трудно обнаружить на фоне мелкоструктурной неоднородности ультразвукового изображения, вызванной спеклами. Наиболее часто для обнаружения и визуализации микрокальцификатов используют специальные адаптивные фильтры [3,4], позволяющие выделять яркие точки от микрокальцификатов на фоне спекловой структуры.

Настоящая работа посвящена теоретическому и экспериментальному обоснованию нового метода выявления микрокальцификатов в молочной железе, основанного на эффекте возрастания радиационной давления в фокальной области ультразвукового пучка при наличии в среде твердых микрочастиц.

Рассмотрим движение сферической частицы радиуса  $a$  и плотностью  $\rho$  в вязкоупругой среде, характеризуемой сдвиговым модулем  $\mu$  и коэффициентом сдвиговой вязкости  $\eta$ . Сила действует на частицу импульсно с амплитудой  $F_0$  в течение времени длительности импульса  $t_0$ . Смещение частицы  $U(t)$  находится из соотношения:

$$U(t) = -\frac{iF_0}{12\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{i\omega t_0} - 1)e^{i\omega t}}{\omega(\mu - i\omega\eta)(1 - ika - k^2 a^2(1 + 2\beta)/9)} d\omega \quad (1)$$

где  $\beta = \rho_s/\rho$  – плотность сферической частицы, нормированной на плотность среды,  $k = \omega \sqrt{\rho/(\mu - i\omega\eta)}$  – комплексное волновое число. При плотности частицы, не превышающей 0.7 плотности среды, возвращение частицы в исходное положение после окончания действия силы имеет аperiодический характер, в противном случае будут наблюдаться одно – два колебания (Рис. 1). Измерения проводились с использованием желатинового фантома, внутрь которого были заморожены полимерные шарики диаметром 1.45 и 0.75 мм. Шарики располагались на глубине 30 мм от поверхности и находились на расстоянии 15 мм друг от друга, что обеспечивало независимость их движений. Радиационная сила создавалась ультразвуковым пучком, излучаемым многоэлементной антенной решеткой L7 – 4. На первом этапе формировалось ультразвуковое изображение фантома, и определялись координаты шариков. Затем проводилась электронная фокусировка пучка в шарик, и излучался толкающий импульс длительностью 0.2 мс различной амплитуды. Смещение шарика

измерялось кросс-корреляционным методом с использованием коротких диагностических импульсов, следующих с частотой 5 кГц. На Рис. 1 звездочками показано смещение среды в отсутствие шарика при действии импульса, сфокусированного на глубину 30 мм. Далее такое возмущение распространяется со скоростью сдвиговой волны, что позволяет измерить ее скорость и вычислить модуль сдвиговой упругости.

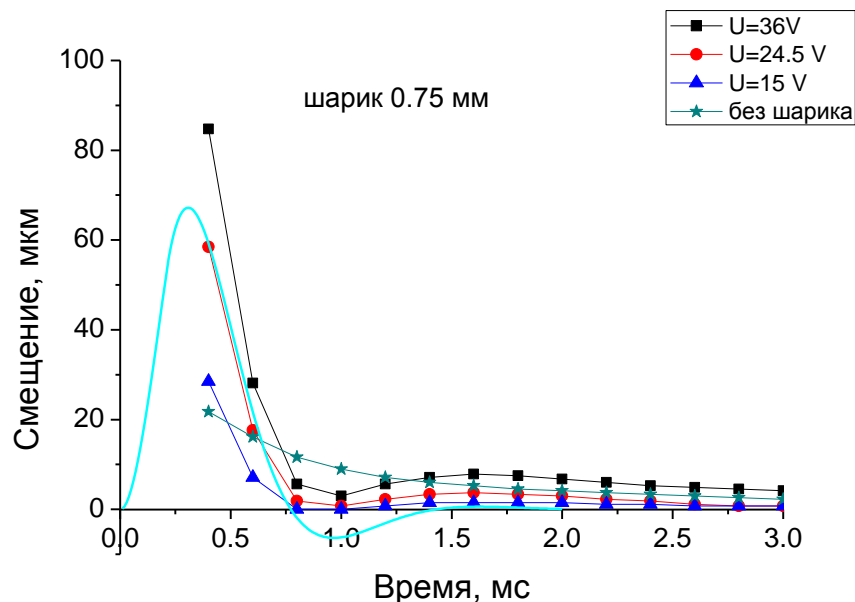


Рис. 1. Смещение сферической частицы диаметром 0.75 мм в желатиновом фантоме при действии ультразвука различной интенсивности. Длительность импульса 0.2 мс. Символами показаны результаты измерений, линиями – результаты расчетов с использованием формулы (3.1.2.1). Звездочками показано смещение среды при воздействии на нее сфокусированным импульсом в отсутствие шарика.

Измерения проводились с использованием ультразвуковой диагностической системы Verasonics с открытой архитектурой. Система позволяет программным образом формировать излучаемые импульсы и обеспечивает доступ к принимаемым высокочастотным сигналам. Программирование системы производится в среде Matlab. Система имеет дополнительный блок питания, позволяющий создавать импульсы произвольной длительности и повышенной мощности, что также отличает ее от стандартной системы ультразвуковой диагностики. В работе использовалась стандартный многоэлементный датчик L7 – 4 с параметрами: число элементов 128, размер элемента 15x0.25 мм, расстояние между соседними элементами 0.05 мм, радиус кривизны линзы 40 мм. Фокусировка пучка в плоскости изображения осуществлялась электронным образом путем возбуждения элементов датчика с заданными временными задержками.

Измерения движения как отдельного шарика, так и среды в целом, проводились следующим образом. На поверхность фантома устанавливался многоэлементный датчик L7-4, на поверхность которого был нанесен слой ультразвукового геля. Строилось ультразвуковое изображение (В-скан) на частоте 5 МГц области фантома, где находились объекты. При этом использовался как встроенный алгоритм построения изображения, так и оригинальный, разработанный в лаборатории МедЛаб. Определялись координаты объекта в плоскости изображения, и в эту точку фокусировался ультразвуковой пучок. Предварительно в среду посылались плоская волна (опорный импульс на Рис. 2), сформированная излучением всех элементов одновременно без временных задержек, и записывалось изображение в отсутствие

движений вместе со спекловой структурой. Длительность опорного и измерительных импульсов составляла 0.5 мкс, что соответствовало 2 - 3 периодам излучаемой волны.

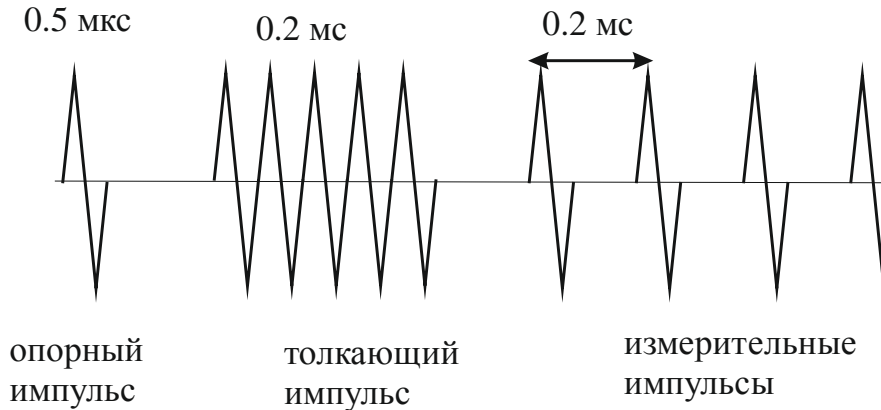


Рис. 2. Временная диаграмма импульсов при возбуждении и регистрации смещений среды и частиц.

При фокусировке импульса длительностью 0.2 мс (толкающий импульс на Рис. 2) в однородную среду (на Рис. 1 показано звездочками) в области фокальной перетяжки возникает смещение среды под действием радиационной силы, объемная плотность которой определяется интенсивностью волны  $I$  и коэффициентом поглощения звука  $\alpha$ :  $F = 2\alpha I/c$ . Возникающие механические напряжения вызывают генерацию сдвиговой волны, которая распространяется со скоростью  $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ .

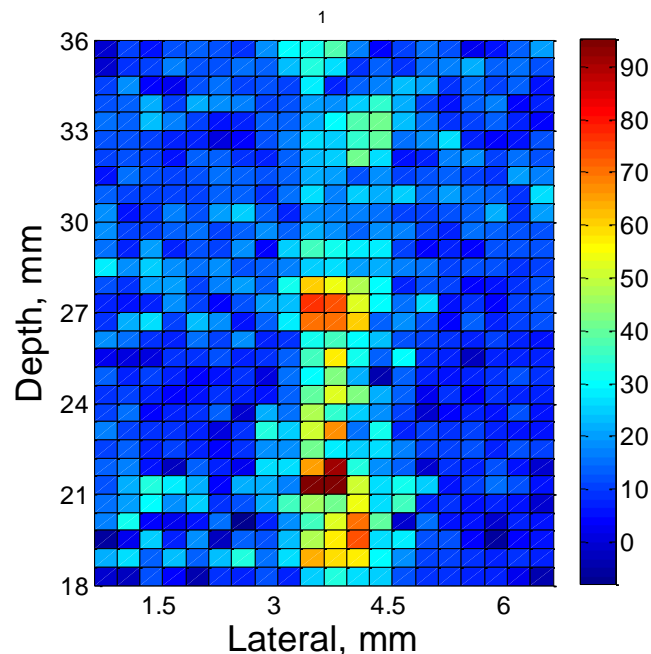


Рис. 3. Распределение смещений (в микронах) в среде с распределенными шариками диаметром 0.75 мм через 0.2 мс после окончания толкающего импульса. Пучок фокусировался на глубину 27 мм, граница вставки с шариками находилась на глубине 18 мм.

При фокусировке на шарик происходит рассеяние ультразвуковой волны и создается радиационная сила, которая смещает шарик от исходного положения. После окончания действия импульса шарик еще некоторое время движется по инерции, а затем возвращается в исходное положение, совершая одно колебание (Рис. 1).

Максимальные смещения шариков составляют десятки и сотни микрон, что на порядок и более превышает смещения, создаваемые в однородной среде за счет объемного поглощения волны.

При фокусировке импульса в группу шариков движение среды имеет гораздо более сложный характер. Часть пучка рассеивается на шариках, и в этих местах возникают локальные максимумы смещений. В эксперименте, результаты которого представлены на Рис. 3 такой шарик находился на глубине 21 см, где смещения в несколько раз выше, чем в области фокусировки (27 см). Есть также небольшой максимум смещений на глубине 19 см. Наличие нескольких источников волн вызывает сложную интерференционную картину в среде с шариками, поэтому смещения в различных точках могут иметь локальные максимумы, чего никогда не наблюдается в однородной среде. Зависимость зарегистрированных смещения на различных глубинах в среде с шариками диаметром 0.75 мм от времени показана на Рис. 4. Для сравнения толстой линией показана релаксация однородной среды на глубине 34.8 мм при фокусировке на ту же самую глубину 27 мм, но уже в среде без шариков. Движение среды с шариками продолжается несколько миллисекунд, при этом могут наблюдаться локальные максимумы, связанные с приходом в данную точку сдвиговых волн от соседних источников.

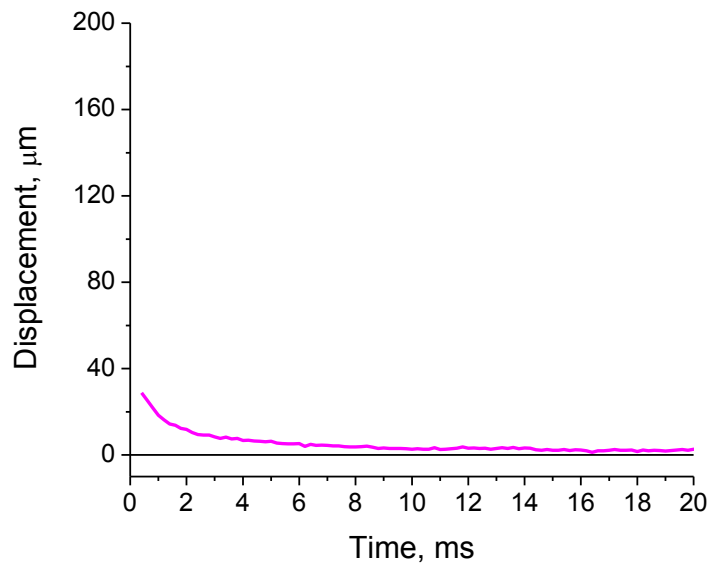


Рис. 4. Зависимость смещений в среде с распределенными шариками диаметром 0.75 мм от времени на различных расстояниях от поверхности. Пучок фокусировался на глубину 27 мм, граница вставки с шариками находилась на глубине 18 мм.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-02-00114-а и гранта Правительства РФ № 11.G34.31.0066.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D.A. Picca, E.S. Paredes. //Applied Radiology. 2003. V. 32. No.9. P. 29.
2. G.M. Tse, et al. // J Clin Pathol. 2008. V.61. P. 145.
3. P. M. Shankar. // IEEE Trans. Ultrason. Ferroel.. Freq. Control. 2013. V. 60. No. 5. P. 932.

## Электрический пробой в жидкостях при воздействии наносекундных импульсов

В.Г. Андреев<sup>1</sup>, В.А. Вдовин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Физический факультет МГУ, Ленинские Горы 1, Москва

<sup>2</sup>ИРЭ РАН, Моховая 11, Москва)

[vdv@cplire.ru](mailto:vdv@cplire.ru)

Актуальность исследований пробоя диэлектриков и построения соответствующих математических моделей подтверждается появлением нескольких экспериментальных работ за последнее время [1-4]. Воздействие импульсных полей приводит к пробойным явлениям в диэлектриках, что вызывает изменение их структуры и механических свойств, генерацию дефектов и дислокаций. В последнее время появился ряд работ, в которых описаны новые эффекты, связанные с механизмами электрического пробоя в жидкостях. Наиболее интересные явления происходят в течение нескольких наносекунд после приложения высокого напряжения. В группе Университета Дрекселя (США) было экспериментально показано, что применение сильного неоднородного электрического поля с временем нарастания порядка наносекунд приводит к образованию в жидкости области, насыщенной нанопорами за счет отрицательного давления, вызванного электрострикцией [1,3]. Практически сразу формируется ударная волна, распространяющаяся со скоростью звука. Размер пор достаточен для ускорения электронов и создания лавинообразного процесса ионизации атомов и инициирования пробоя. Важно то, что электрострикция устанавливается за доли наносекунд, что много меньше характерного времени развития гидродинамических процессов. Из этого следует, что существует возможность формирования разряда в жидкости в масштабах времен много меньших, чем образование пузырьков вблизи электрода. Это принципиально отличается от традиционного представления, когда развитие пробоя начинается только после образования пузырьков. Экспериментальное и теоретическое исследование физических процессов в жидких диэлектриках при приложении внешнего нестационарного поля большой напряженности [1-3] показало, что электрострикция и образование волн сжатия и разрежения существенным образом влияют на процесс пробоя и приводят к образованию кавитационных полостей в жидкости, в которых и начинает развиваться пробой.

Экспериментально исследовался пробой в жидкостях при воздействии высоковольтных импульсов наносекундной длительности. Использовался высоковольтный генератор импульсов длительностью 7 нс с крутизной нарастания 2 нс и амплитудой напряжения до 300 кВ. Генератор работал в режиме разовых импульсов. Формы падающих и отраженных импульсов напряжения регистрировались коаксиальным измерителем. Формы импульсов тока регистрировались низкоиндуктивным шунтом. Были проведены пробные измерения пробоя в жидкостях в геометрии «острие - плоскость» (рис.1). На рис.2 представлены типичные зависимости импульса напряжения и импульса тока, возникающие при пробое образца. Задержка импульса тока относительно импульса напряжения соответствует времени пробоя (на рис.2 время пробоя 7 нс). По измеренному времени пробоя и известной толщине образца оценивалась скорость разряда. Измеренные значения пробойных напряжений и скорости распространения разряда в дистиллированной воде и трансформаторном масле соответствуют значениям, полученным в работе [5].

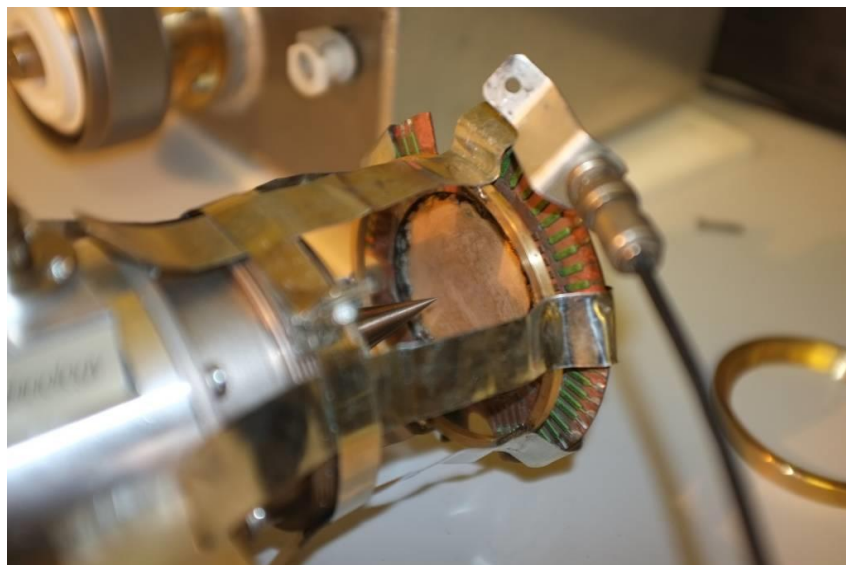


Рис. 1. Измерительная ячейка с конфигурацией электродов «острие – плоскость», конструктивно объединенная с малоиндуктивным измерителем импульсного тока

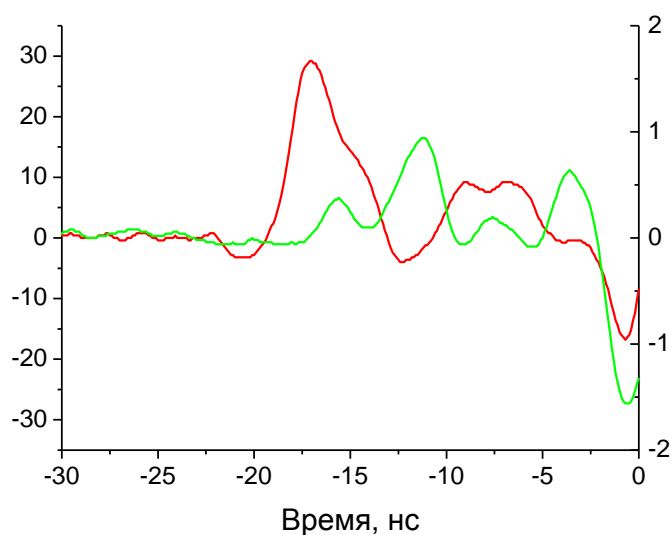


Рис.2. Осциллограммы импульса напряжения (красная линия) и импульса тока (зеленая линия)

Работа поддержана РФФИ (грант 13-02-12233-офи-м-2013).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M.N. Shneider, M.Pekker. // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. P. 043004.
2. Y. Seepersad et al. // J. of Physics D: Appl. Phys. 2013. V. 46. No 16. P. 162001.
3. M.N. Shneider, M. Pekker, A. Fridman. // IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation. 2012. V. 19. No. 5. P. 1579.
4. T. Ihara et al. // J. of Physics D: Appl. Phys. 2012. V. 45. No 16. P. 075204.
5. А. А. Воробьев, В. Я. Ушаков, В. В. Багин// Электротехника. 1971. № 7.С. 55.

## Нелинейные волны в микротрубочках аксонов нервных клеток

А.Н. Бугай<sup>1</sup>, S. Zdravković<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт ядерных исследований

<sup>2</sup>Institut za nuklearne nauke Vinča

[bugay\\_aleksandr@mail.ru](mailto:bugay_aleksandr@mail.ru)

Микротрубочки представляют собой длинные неразветвленные тонкие цилиндры с наружным диаметром около 25 нм и внутренним — 15 нм. Наиболее протяженные микротрубочки, входящие в состав аксонов нервных клеток могут достигать нескольких миллиметров в длину. Трубочки построены, как правило, из 13 нитей полимера, называемых протофиламентами. Каждый протофиламент состоит из субъединиц, соединенных в линейном порядке, а каждая субъединица является димером, содержащим  $\alpha$ - и  $\beta$ -молекулы белка тубулина (Рис. 1). Микротрубочки играют ключевую роль при клеточном делении, секреции, межклеточной транспортировке веществ.

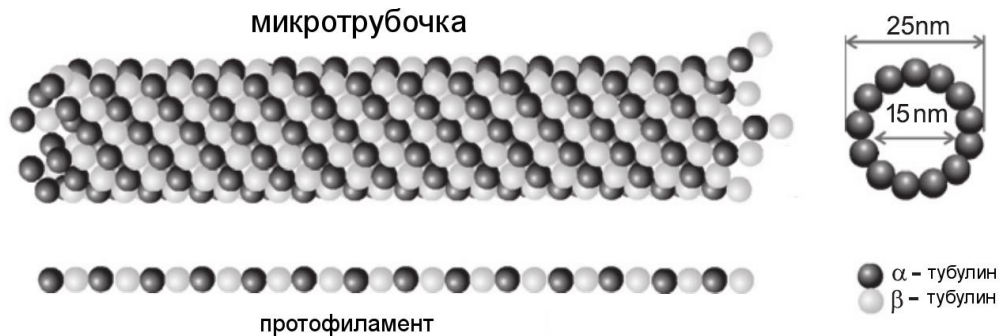


Рис. 1. Структура участка микротрубочки с характерными размерами

Микротрубочки привлекают интерес физиков с точки зрения как их нелинейной динамики [1,2], так и возможного участия в квантовых вычислениях [3,4]. Процессы переноса сигналов и энергии различными структурными возмущениями микротрубочек интенсивно исследовались для простых однокомпонентных моделей. В настоящей работе предпринята попытка обобщения данных результатов путем построения модели с несколькими степенями свободы. При этом в качестве конкретного объекта выбраны микротрубочки в аксонах нервных клеток, обладающие достаточной структурной стабильностью и большой длиной.

Применяемый модельный подход [1,2] использует усредненное описание динамики микротрубочки в рамках одного протофиламента, когда влияние соседей учитывается эффективным потенциалом. Каждый  $n$ -й димер тубулина вдоль цепи протофиламента характеризуется проекцией  $u_n$  дипольного момента на продольную ось симметрии микротрубочки, а расстояние между соседними димерами задается величиной  $r_n$ . Изменение внутреннего распределения зарядов димера допускает наличие двух устойчивых состояний, характеризующихся различными дипольными моментами и конформацией. Гамильтониан такой бистабильной системы может быть записан согласно [5]:



$$H = \sum_n \left( \frac{1}{2} m \dot{u}_n^2 + \frac{1}{2} M \dot{r}_n^2 + \frac{k}{2} (u_{n+1} - u_n)^2 + \frac{K}{2} (r_{n+1} - r_n)^2 - A u_n^2 + B u_n^4 - \mu E u_n + (r_{n+1} - r_n) (a(u_n - u_0) + b(u_n - u_0)^2) \right), \quad (1)$$

где  $m$  и  $M$  обозначают приведенную и полную массы димера тубулина, величины  $k$  и  $K$  характеризуют взаимодействие между ближайшими соседями вдоль протофиламента. Коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $\mu$  задают двухямыный потенциал, описывающий структурный переход внутри одного димера. Данный потенциал является несимметричным вследствие воздействия коллективного электрического поля  $E$  микротрубочки на отдельный димер. Последние два слагаемых в (1) с параметрами  $a$  и  $b$  учитывают связь деформации микротрубочки и структурного перехода внутри отдельного димера тубулина. Здесь величина  $u_0$  характеризует равновесный дипольный момент тубулина в основном состоянии с наименьшей энергией.

Анализ соответствующих (1) уравнений движения в континуальном приближении показывает возможность существования целого семейства двухкомпонентных солитонных и бризерных решений. Причем в рассматриваемом приближении удастся получить явные аналитические выражения. В солитоне компонента  $r$ , описывающая деформацию микротрубочки, имеет форму кинка, а компонента  $u$ , описывающая изменение локальной поляризации, имеет колоколообразную форму. Численный анализ исходной дискретной системы с учетом столкновений и диссипации показывает, что наибольшей динамической стабильностью обладают топологические солитоны, описывающие локальный коллективный переход из основного в метастабильное состояние димеров тубулина.

Полученные решения связывают распространение электрических и упругих возмущений вдоль микротрубочки. Скорости и другие свойства данных солитонов сильно зависят от коллективного поля микротрубочки, снимающего вырождение в структурных состояниях димеров тубулина. В этой связи различные формы и режимы распространения таких нелинейных волн можно рассматривать как потенциальный механизм передачи внутриклеточных сигналов и энергии вдоль микротрубочек. Дополнительным свидетельством, указывающим на справедливость такого предположения, является соответствие характерных величин скоростей солитонов в микротрубочках и скоростей электрических в аксонах нервных клеток [6], составляющих десятки метров в секунду.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M.V. Satorić, J.A. Tuszyński, R.B. Žakula // Phys. Rev. E 1993. V. 48. P. 589.
2. S. Zdravković, M.V. Satorić, S. Zeković // Europhys. Lett. 2013. V. 102. P. 38002.
3. J.A. Tuszyński et al // J. Theor. Biol. 1995. V. 174. P. 371.
4. N.E. Mavromatos, D.V. Nanopoulos // Int. J. Mod. Phys. B 1998. V. 12. P. 517.
5. Л.И. Маневич и др // УФН 1994. Т. 164. №9. С. 937.
6. A.L. Hodgkin, A.F. Huxley // J. Physiol. 1952. V. 108. P. 500.

## Нелинейные волны в резонаторе из гелеобразной среды с неоднородностями в виде полостей

Т.Б. Крит, В.Г. Андреев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра акустики  
[timofey@acs366.phys.msu.ru](mailto:timofey@acs366.phys.msu.ru)

Измерены амплитуды гармоник стоячих сдвиговых волн, возбуждаемых в резонаторе, заполненном неоднородной средой с кубичной нелинейностью. Наличие неоднородностей приводит к появлению квадратичной нелинейности, отсутствующей в однородной среде. Поэтому было важно исследовать генерацию чётных гармоник и оценить вклад квадратичной нелинейности в развитие нелинейных эффектов.

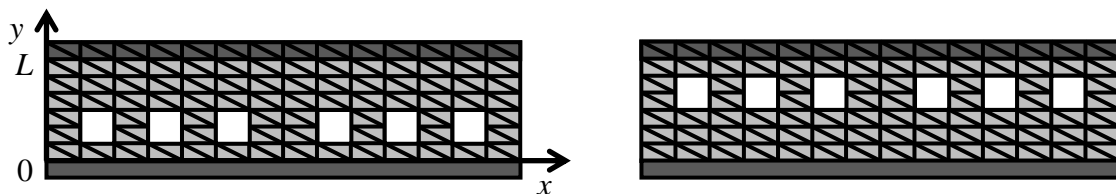


Рис. 1. Изображение конфигураций резонатора с полостями у нижнего (слева) и верхнего (справа) основания. Чёрными линиями показаны границы конечных элементов в форме треугольных призм.

Рассмотрим резонатор в виде прямоугольного параллелепипеда с основанием  $70 \times 40$  мм и толщиной  $L=15$  мм из резиноподобного материала с плотностью  $\rho=0.98$  см<sup>3</sup>. Толщина резонатора  $L$  в несколько раз меньше его поперечных размеров, что позволяет пользоваться одномерным приближением [1]. В параллелепипеде на одной высоте параллельно боковым граням сделано 6 сквозных полостей квадратного сечения со стороной 5 мм. Их центры смещены относительно срединного сечения резонатора на расстояние 2.5 мм, что позволяет получить 2 различных конфигурации резонатора (рис. 1). Параллелепипед закрепляется на горизонтальной пластине, которая совершает гармонические колебания в направлении оси  $x$ . На верхней грани ( $y=L$ ) закреплена пластина массы  $M$ , площадь которой равна площади верхней грани. Модель среды изображается параллельным соединением упругого элемента с нелинейным модулем  $\mu_0 = \mu_{00}(1 + \beta\varepsilon^2)$ , где  $\mu_{00}$  – линейный модуль сдвига,  $\beta$  – нелинейный параметр, и максвелловского вязкоупругого элемента с вязкостью  $\eta_1$  и сдвиговым модулем  $\mu_1 = \eta_1/\tau$ , где  $\tau$  – характерное время релаксации напряжения.

Модуль сдвига  $\mu_0$  был предварительно определён статическим методом. Нижняя граница закреплялась неподвижно, а к верхней границе прикладывалась сила, создающая сдвиговую деформацию. Измеренные зависимости напряжения от деформации для обеих конфигураций совпали с достаточно большой точностью. Зависимости аппроксимировались кубичной параболой:  $\sigma = \mu_{00}(\varepsilon + \beta\varepsilon^3)$ , и вычислялись значения линейного и нелинейного модулей. В неоднородном резонаторе  $\mu_{00}=6$  кПа,  $\beta=1.33$ . Аналогичные измерения в однородном резонаторе из такого же материала позволили измерить сдвиговый модуль и нелинейный параметр самого полимерного материала (обозначения с индексом «м»):  $\mu_{00}^m=10$  кПа,  $\beta^m=1.34$ . Как и следовало ожидать, полости снижают эквивалентную упругость материала. Но статический нелинейный модуль как однородного материала, так и материала с неоднородностями совпали.

При деформации резонатора на величину  $\varepsilon$  (в долях толщины) в ней возникает механическое напряжение, которое складывается из напряжения пружинки

$$\sigma_{\infty} = \mu_0 \varepsilon = \mu_0 (1 + \beta \varepsilon^2) \varepsilon, \quad (1)$$

и напряжения максвелловской схемы  $\sigma'$

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \frac{\sigma'}{\tau} = \frac{\eta_1}{\tau} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (2)$$

Уравнение движения частиц среды имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial y}. \quad (3)$$

В него входит производная скорости частиц  $v$  по времени и механическое напряжение  $\sigma = \sigma_{\infty} + \sigma'$ . Уравнения (1) – (3) должны быть дополнены двумя граничными условиями, первое из которых – заданное значение ускорения нижней пластины, а второе определяется из закона движения верхней пластины:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{y=0} = W_0 \cos \omega t, \quad (4)$$

$$\left( M \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma S \right) \Big|_{y=L} = 0, \quad (5)$$

Система (1) – (6) в работе [2], где рассматривался однородный резонатор, моделировалась методом конечных разностей на смещённых сетках. Используемый в [2] алгоритм не позволяет моделировать неоднородный резонатор. Моделирование в линейном приближении проводилось методом конечных элементов (МКЭ) [1] без учёта кубичной нелинейности и релаксации, но с учётом структурных неоднородностей. В результате, решение разбивалось на два этапа.

На первом этапе использовался МКЭ для определения линейного сдвигового модуля упругости материала ( $\mu_{00}$ ). Затем, также с использованием МКЭ, вычислялась пара эффективных значений сдвигового модуля однородных резонаторов, при которых резонансные кривые совпадали с измеренными резонансными кривыми для каждой конфигурации неоднородного резонатора.

На втором этапе расчёт проводился в рамках модели нелинейного однородного резонатора с релаксацией [2]. Для каждой конфигурации использовались эффективные значения, вычисленные с помощью МКЭ. Значение нелинейного коэффициента  $\beta$ , при котором различие между измеренной и рассчитанной зависимостью сдвига резонансной частоты от величины сдвиговой деформации было минимально в смысле МНК принималось за измеренный параметр неоднородной среды.

Измерения были проведены на установке, описанной в [2]. Колебания нижней пластины резонатора возбуждались вибратором Brüel&Kjær 4810. Сигнал на вибратор поступал с генератора Tektronix 3021B через усилитель мощности MMF LV 103. Ускорения обеих пластин резонатора измерялись миниатюрными одноосными акселерометрами Brüel&Kjær 4374. Сигналы акселерометров регистрировались осциллографом Tektronix 3032B и передавались через GPIB интерфейс в компьютер. Управление установкой и сбор данных осуществлялись с помощью программы, написанной в среде LabView. Измерения проводились с шагом по частоте 0.1 Гц. При заданной частоте на выходе генератора устанавливалось напряжение, при котором амплитуда ускорения нижней пластины была немного меньше необходимого значения.

Это напряжение увеличивалось, пока амплитуда ускорения не достигала необходимого значения с погрешностью, не превышающей 2%. В течение 2–3 секунд в резонаторе устанавливались стационарные колебания, после чего производилось измерение и запись ускорения верхней пластины резонатора. Затем задавалось следующее значение частоты и измерения повторялись в соответствии с описанным алгоритмом.

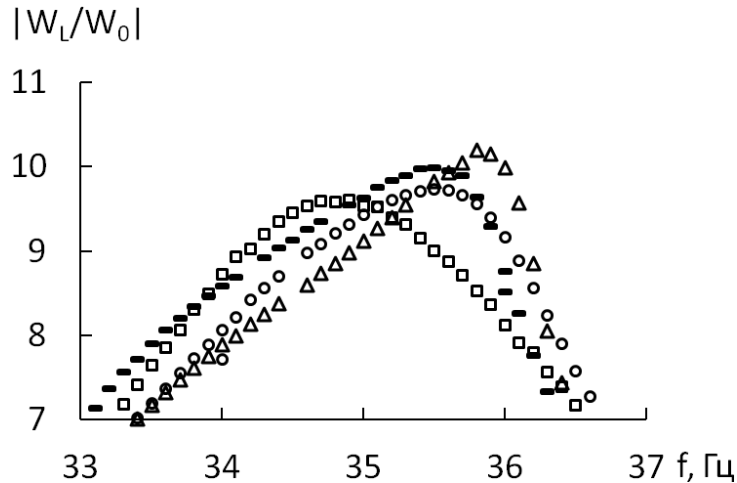


Рис. 2. Измеренные резонансные кривые вблизи максимумов в резонаторе с полостями внизу (в области больших деформаций). Кривые, показанные разными символами, соответствуют разным амплитудам ускорения нижней границы ( $\square$  – 1,  $\circ$  – 15,  $\blacksquare$  – 18,  $\triangle$  – 20  $\text{м/с}^2$ ).

На рис. 2 представлены измеренные резонансные кривые вблизи максимумов при разных амплитудах первой гармоники ускорения нижней пластины. Симметричная резонансная кривая, измеренная при амплитуде 1  $\text{м/с}^2$ , соответствует линейному режиму. С увеличением амплитуды ускорения резонансная частота увеличивается. Резонансная кривая становится несимметричной, на ней появляется перегиб, характерный для сред с кубичной нелинейностью. В [3] показано, что при определённых амплитудах в однородном резонаторе возможно появление области бистабильности.

По измеренным резонансным кривым была построена зависимость первой резонансной частоты от амплитуды ускорения нижней пластины. Зависимость была аппроксимирована теоретической кривой, рассчитанной с использованием модели однородного резонатора с учётом нелинейности и релаксации [2]. При расчёте было использовано эффективное значение модуля сдвига (7.6 кПа), при котором в линейном режиме ( $W_0=1 \text{ м/с}^2$ ) измеренная в неоднородном резонаторе резонансная кривая совпадает с рассчитанной с помощью одномерной модели однородного резонатора с учётом нелинейности и релаксации. По результатам аппроксимации было определено эффективное значение динамического нелинейного параметра в резонаторе с полостями внизу  $\beta=1.2$ , что практически совпадает со значением, определённым в ходе статических измерений. Как показано в [2], в однородной среде динамический нелинейный параметр на частотах 30-50 Гц равен 0.7-0.8, что почти вдвое меньше значения нелинейного параметра, измеренного по статической зависимости напряжения от деформации.

В среде с кубичной нелинейностью профиль волны искажается за счёт появления третьей гармоники [4,5]. В резонаторе этот эффект может быть более выраженным при наличии неоднородностей в области больших деформаций, а может быть существенно снижен, если неоднородности расположены вблизи пучности колебаний. На рис. 3

приведены первые три гармоники в измеренных профилях ускорения верхней границы резонатора. Заштрихованными столбиками показан гармонический состав профиля верхней границы резонатора с полостями внизу. Чёрными столбиками показан гармонический состав профиля верхней границы резонатора с полостями вверху. Видно, что уровень 3-й гармоники выше в резонаторе с полостями внизу. Наличие в спектре других гармоник (прежде всего, 2-й) связано с тем, что при проведении измерений возбуждение производится маломощным вибратором и становится нелинейным при больших амплитудах ускорения нижней пластины. Кроме того, сказывается структурная квадратичная нелинейность, которая также усиливается при положении неоднородностей в области максимальных деформаций.

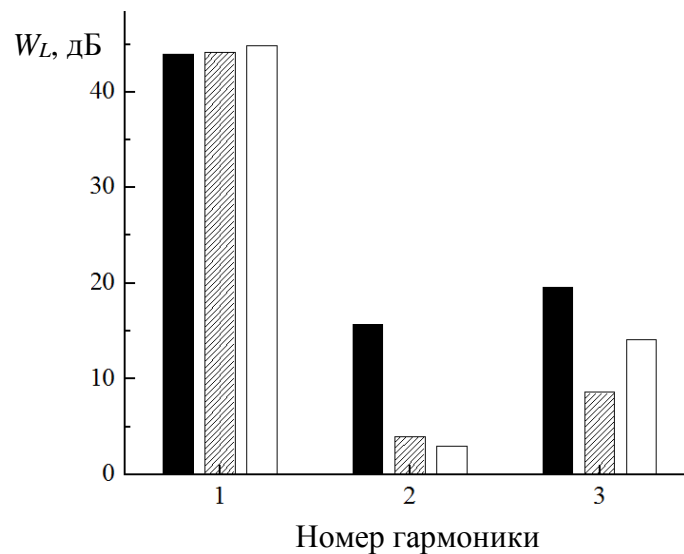


Рис. 3. Первые три гармоники в измеренных профилях ускорения верхней границы резонатора с полостями в области больших (заштрихованные столбики) и малых (чёрные столбики) деформаций. Белыми столбиками показаны гармоники в однородном резонаторе без полостей.

Результаты измерений показали, что наличие полостей в области больших деформаций в нелинейном режиме колебаний приводит к усилению нелинейных эффектов. Так, рост частоты соответствует расчётным значениям для коэффициента нелинейности  $\beta=1.2$ , что практически совпадает с измеренным статическим значением данного параметра. Для однородного резонатора, исследованного в работе [2], динамический нелинейный параметр оказался вдвое меньше статического.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-02-00114-а и гранта Правительства РФ № 11.G34.31.0066.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В.Г. Андреев и др. // Акуст. журн. 2011. Т.57. №1. С. 3–12.
2. В.Г. Андреев, Т.Б. Крит, О.А. Сапожников // Акуст. журн. 2011. Т.57. №6. С. 763–770.
3. О.В. Руденко, К.М. Хедберг, Б.О. Энфло // Акуст. журн. 2007 Т. 53. № 4. С. 522–532.
4. E.A. Zabolotskaya, et al. // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116. No 5. P. 2807–2813.
5. S. Catheline, et al. // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. No 16. 164301. P. 1–4.

## Распространение упругих волн в двумерных акустических композитных структурах

П.В. Мальнева

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова  
[malneva@physics.msu.ru](mailto:malneva@physics.msu.ru)

Особый интерес для исследований в последние годы представляют среды, в которых не совпадают направления фазовой и групповой скорости акустических волн, что может быть использовано для создания новых и перспективных акустооптических устройств. В работе [1] было обнаружено, что в кристаллических, периодических и композитных структурах углы между фазовой и групповой скоростью волны могут принимать практически любые значения. Наиболее интересны в данном случае композитные структуры (акустические метаматериалы), состоящие из периодически расположенных субволновых включений одного кристаллического материала в матрице из другого материала, поскольку их эффективными параметрами можно управлять, изменяя геометрические параметры.

Известно, что значительная угловая зависимость акустических скоростей в кристаллах приводит к большим значениям углов акустического сноса, т.е. углов между волновым вектором и вектором Умова-Пойнтинга. Рекордное значение угла акустического сноса наблюдается в кристалле парателлуриата ( $\text{TeO}_2$ ), где он составляет  $\psi = 74^\circ$  [2-3]. В связи с этим представляется актуальным исследование распространения упругих волн в акустических метаматериалах, в состав которых входит этот кристалл, обладающий сильной акустической анизотропией.

В настоящей работе был произведен численный расчёт фазовых скоростей звука в двумерных акустических композитных структурах, состоящих из изотропных плавленого кварца ( $\text{SiO}_2$ ) и флинта, а также широко используемых в акустооптике анизотропных тетрагональных кристаллов парателлуриата ( $\text{TeO}_2$ ) и рутила ( $\text{TiO}_2$ ).

В случае неоднородной анизотропной двумерной среды уравнение движения вектора смещения может быть записано следующим образом [4]:

$$\rho(\vec{r})\ddot{U}_i(\vec{r}, t) = \partial_j [c_{ijkl}(\vec{r})\partial_k U_l(\vec{r}, t)], \quad (1)$$

где  $\vec{r} = (\vec{x}, y) = (x, y, z)$  – координаты вектора,  $\rho(\vec{r})$ ,  $c_{ijkl}(\vec{r})$  – зависящие от координаты объемная плотность и тензор упругости соответственно. В данной работе рассматривается XOY-срез композитного материала, состоящего из двумерного массива одного материала (бесконечные по оси Z цилиндры), включенного периодически в матрицу из другого. Материальные параметры  $\rho(\vec{x})$ ,  $c_{ijkl}(\vec{x})$ , благодаря пространственной неоднородности, могут быть представлены в виде разложения в ряд Фурье по отношению к двумерным векторам обратной решетки  $\vec{G} = (G_1, G_2)$  [4]:

$$\rho(\vec{x}) = \sum_G \exp(i\vec{G}\vec{x})\rho_{\vec{G}}, \quad c_{ijkl} = \sum_G \exp(i\vec{G}\vec{x})c_{\vec{G}}^{ijkl}, \quad (2)$$

где  $\rho_{\vec{G}}$ ,  $c_{\vec{G}}^{ijkl}$  – коэффициенты Фурье, равные соответственно [4]:

$$\rho_{\vec{G}} = A_c^{-1} \int d^2x \rho(\vec{x}) \exp(-i\vec{G}\vec{x}), \quad c_{\vec{G}}^{ijkl} = A_c^{-1} \int d^2x c_{ijkl}(\vec{x}) \exp(-i\vec{G}\vec{x}), \quad (3)$$

где  $A_c$  – площадь элементарной ячейки двумерной композитной структуры.

На основе значений материальных параметров тяжелого флинта, плавленого кварца ( $\text{SiO}_2$ ), парателлурита ( $\text{TeO}_2$ ) и рутила ( $\text{TiO}_2$ ), приведённых в [3], были рассчитаны зависимости акустической скорости для различных направлений распространения упругих волн. На рис. 1-2 представлены кривые, иллюстрирующие зависимости медленности ( $1/V$ ) от направления распространения звука в кристаллах в плоскости XOY.

Рис. 1 представляет расчет, проведенный для композитных материалов, состоящих из матрицы  $\text{SiO}_2$ , в которую включены бесконечные по оси Z флинтовые стержни. Расчет произведен для различных значений фактора заполнения элементарной ячейки композитного материала:  $f = \pi r^2 / a^2$ , где  $a$  – период решетки, а  $r$  – радиус включенного цилиндра. На рис. 1 черным цветом обозначены поверхности обратных скоростей для плавленого кварца, а серым – медленности композитных структур.

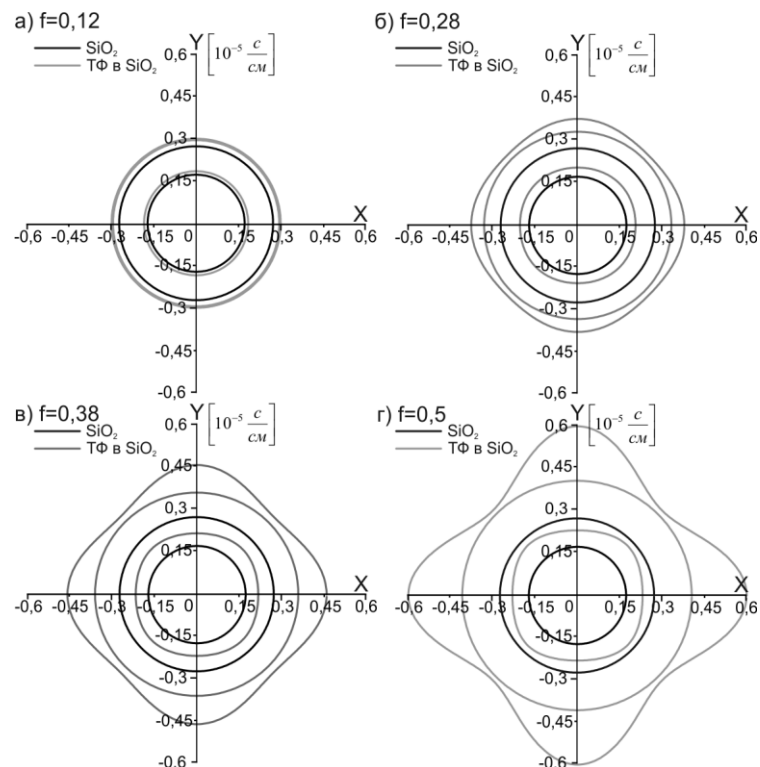


Рис. 1. Поверхности акустической медленности для акустических метаматериалов, состоящих из тяжелого флинта и плавленого кварца для различных значений фактора заполнения

Анализ показал, что увеличение радиуса цилиндров из флинта, включенных в матрицу из  $\text{SiO}_2$ , сильно влияет на скорость распространения звука в зависимости от направления в материале - появляется анизотропия.

На рис. 2 представлены результаты моделирования акустических метаматериалов, имеющих анизотропные составляющие. Рис. 2 иллюстрирует значения обратных скоростей для тетрагонального кристалла парателлурита и изотропного кристалла плавленого кварца (рис. 2а); акустических метаматериалов, состоящих из матрицы  $\text{TeO}_2$  с неоднородностями  $\text{SiO}_2$  и матрицы  $\text{SiO}_2$  с неоднородностями  $\text{TeO}_2$  (рис. 2б); кристаллов парателлурита и рутила (рис. 2в) и композитов, составленных из матрицы  $\text{TeO}_2$  с неоднородностями  $\text{TiO}_2$  и матрицы  $\text{TiO}_2$  с неоднородностями  $\text{TeO}_2$  (рис. 2г).

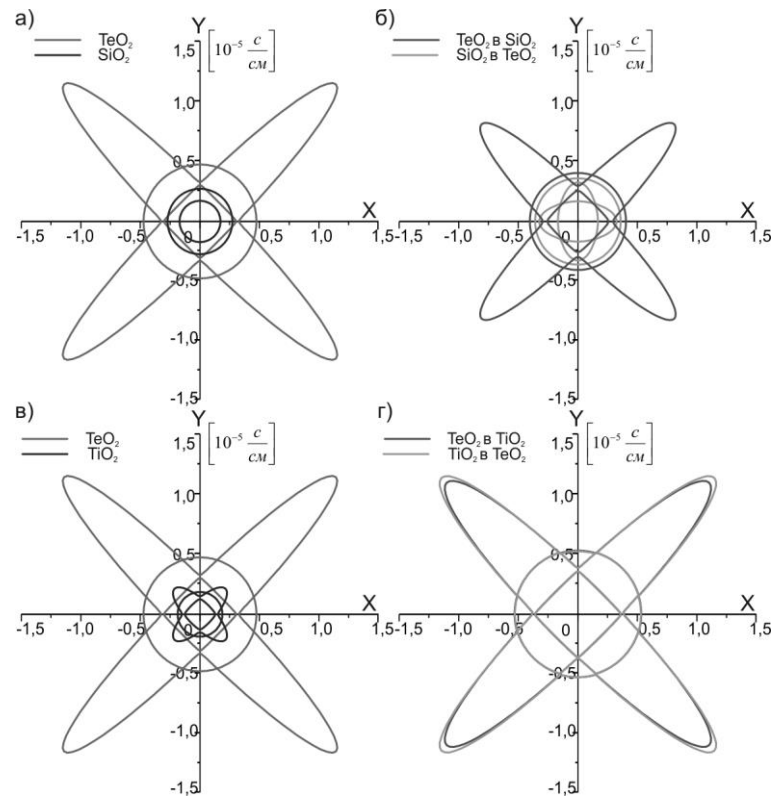


Рис. 2. Поверхности акустической медленности для а) кристаллов парателлуриита и плавленого кварца; б) акустических метаматериалов, состоящих из парателлуриита и плавленого кварца; в) кристаллов парателлуриита и рутила; г) акустических метаматериалов, состоящих из парателлуриита и рутила

Проведенное моделирование показало, что на скорость распространения звука в акустическом композите оказывает влияние отношение материальных параметров составляющих его кристаллов, такие как плотность и значение упругих коэффициентов. Так же, показано, что существенное влияние на угловую зависимость скорости звука оказывают геометрические параметры акустического метаматериала. Данные исследования позволяют определить основные характеристики упругих волн в зависимости от состава и конфигурации акустического композитного материала. Обнаруженные закономерности могут быть использованы при разработке новых акустооптических модуляторов, дефлекторов и фильтров на основе рассмотренных композитных структур.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Буров et al.// УФН. 2011. Т. 181. №11. С. 1205.
2. Э. Дьелесан, Д. Руайе "Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов" М.: Наука, 1982.
3. В.А. Auld "Acoustic Fields and Waves in Solids" Malabar, Florida: Robert E. Krieger Publ. Company, 1990.
4. Т.-Т. Wu, Z.-G. Huang, S. Lin // Physical review B. 2004. V.69. №9. P.094301.